现代应用数学丛书

特殊函数

〔日〕小谷正雄
桥本英典 著
錢端壮 譯
莫叶等 校

海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本，介紹几种有重要应用的特殊函数。共八章。介紹的特殊函数有 Γ 函数，B 函数，超几何函数，Jacobi 多項式、Legendre 函数，合流超几何函数，Whittaker 函数，Laguerre 多項式，Hermite 多項式，Bessel 函数，Mathieu 函数，回轉橢球函数等。

本书可供高等学校数学力学系、物理系、工程系师生及工程师等参考。

现代应用数学丛书

特　殊　函　数

原 书 名　特　殊　函　数
原 著 者　〔日〕小谷正雄　桥本英典
原出版者　岩　波　书　店
譯　　者　錢　端　壯
校　　者　莫　叶　等

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 7 12/32　字数 174,000
1962 年 3 月第 1 版　1962 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—8,000

統一书号：13119·455
定价：（十四）1.25 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"现代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　　录

出版説明
第1章　Γ 函数，B 函数 ……1
§1　定义 ……1
§2　积分表示 ……7
§3　鞍点法与 Γ 函数的渐近展开 ……10
§4　Γ 函数的无限乘积与它的微分 ……13
第2章　偏微分方程的变数分离与特殊函数 ……16
§5　变数分离 ……16
§6　椭球坐标 ……18
§7　常微分方程与它的奇异点 ……24
§8　Riemann P 函数与超几何方程 ……28
§9　合流型超几何方程 ……32
§10　各种特殊函数 ……35
第3章　超几何函数 ……38
§11　超几何函数 ……38
§12　积分表示 ……42
§13　解析延拓的几个公式 ……50
§14　几个公式 ……55
§15　Jacobi 多項式 ……62
§16　初等函数表示的超几何函数 ……68
第4章　球函数 ……72
§17　Legendre 函数 ……72
§18　陪 Legendre 函数 ……85
§19　陪 Legendre 多項式与球面調和函数 ……89
第5章　合流型超几何函数 ……94
§20　合流型超几何級数与 Whittaker 函数 ……94
§21　积分表示 ……98
§22　Whittaker 函数与渐近展开式 ……103

§23 几个公式 ……106
§24 Laguerre 方程与 Laguerre 多项式 ……107
§25 抛物柱波动函数与 Hermite 多項式 ……117
第6章 圆柱函数 ……122
§26 Bessel 方程与它的解 ……122
§27 Bessel 函数的渐近展开 I ……130
§28 圓柱函数的遞推公式与 Bessel 型的积分表示 ……133
§29 Bessel 函数的漸近展开 II ……140
§30 整数次的 Bessel 函数与母函数 ……144
§31 半奇数次的 Bessel 函数 ……146
§32 变形 Bessel 函数 ……148
第7章 Mathieu 函数 ……150
§33 Mathieu 微分方程 ……150
§34 基本解 $w_{\mathrm{I}}(z)$, $w_{\mathrm{II}}(z)$ ……151
§35 Floquet 定理，固有指数 ……154
§36 解的稳定与不稳定 ……156
§37 ν 是整数的情形(1)，周期解的分类 ……159
§38 ν 是整数的情形(2)，函数 $\lambda(h^2)$, $A(h^2)$, $B(h^2)$ 的决定 ……164
§39 积分方程 ……169
§40 具有周期解的 Mathieu 方程的第二个解 ……173
§41 变形 Mathieu 方程的解，漸近公式 ……176
第8章 回轉橢球函数 ……181
§42 引言 ……181
§43 函数 $\mathrm{Pe}^m(z)$ ……181
§44 函数 $\mathrm{qe}_n^m(z)$ ……184
§45 函数 $\mathrm{Pe}_n^m(z)$, $\mathrm{Qe}_n^m(z)$, $\mathrm{Re}_n^m(z)$ ……187
§46 $m=1$ 的情形 ……189
§47 $\varkappa\to 0$ 的极限情形 ……190
校后記 ……192
注解 ……195

第1章　Γ函数，B函数

§1 定　　义

含有复变数 z 作为参变数的定积分

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

叫做 Euler 第2种积分。这个积分当 $t\to\infty$ 时，对于任意的 z 值都是收敛的，当 $t\to 0$ 时，它的收敛性就限制在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 的情形。此外，若 z 不是整数时，由于

$$t^{z-1}=e^{(z-1)\log t}=e^{(z-1)(\log|t|+i\arg t)},$$

所以是 t 的多值函数，我們現在規定沿着积分的路綫上恒有 $\arg t=0$，这样，就确定了多値函数的值。于是由于

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \quad (\mathrm{Re}\,z>0,\ \arg t=0), \qquad (1.1)$$

就在 z 的右半平面中定义了函数 $\Gamma(z)$。这个函数叫做Γ函数。

由于(1.1)中的被积函数在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 的部分是 z 的正則函数，所以定积分在 z 的右半平面的任一个区域中，对于 z 一致收斂。卽 $\Gamma(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 时也是正則函数①*。

設在 z 右半平面的閉区域 R 中，$\mathrm{Re}\,z$ 的最小值与最大值分别是 x_1 与 x_2，卽 $0<x_1\leqslant \mathrm{Re}\,z\leqslant x_2$。这时，

$$\text{当 } 0<t<1 \text{ 时，} \quad |t^{z-1}|\leqslant t^{x_1-1},$$
$$\text{当 } 1<t \text{ 时，} \quad |t^{z-1}|\leqslant t^{x_2-1}.$$

于是(1.1)中的被积函数的絕对值，对于所有的 t 值，都比积分

---

* 用①等注明的注解系本书校者所作。因注解較多，全部附于书末。

$\int_0^1 e^{-t}t^{x_1-1}dt+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{x_2-1}dt$ 中相应的被积函数为小。但这积分与閉域 R 中的各 z 值无关，故积分(1.1)对 R 内的一切 z 一致收敛。

对(1.1)施以分部积分，就得到

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{d}{dt}(t^z)\,dt=\frac{1}{z}\int_0^{\infty}e^{-t}t^z dt=\frac{1}{z}\Gamma(z+1),\quad(1.2)$$

由此能够得到关系式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).\qquad(1.3)$$

这是 Γ 函数最基本的性质。

当 z 是正整数 n 时，逐次地利用(1.3)就能够把 $\Gamma(n+1)$ 归結成为用 $\Gamma(1)$ 来表达的关系。即

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1)&=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots\\&=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1\,\Gamma(1)=n!\end{aligned}\qquad(1.4)$$

所以 Γ 函数实质上是整数阶乘的扩張情形。

由(1.1)仅能把 $\Gamma(z)$ 定义于 z 的右半平面内，但是逐次地利用(1.2)，能把作为解析函数的 $\Gamma(z)$ 延拓到 z 的左半平面内。譬如，設 z 的实部是 x，并且 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，对这种 z 的函数值利用图1.1的示意，就能由对 $x>0$ 的值来导出。这样所得到的在 $0<x<\frac{1}{2}$ 部分上的函数值，与由(1.1)所定义的函数值完全一致[②]。

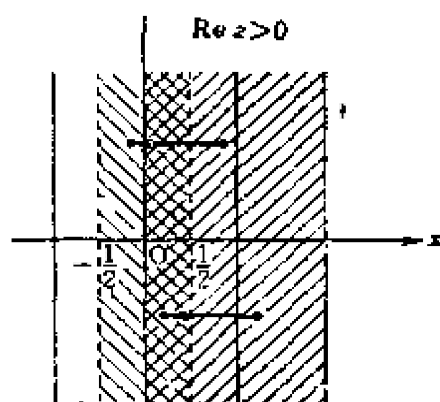


图 1.1

接連地使用(1.2)，对于满足 $-(n+1)<\text{Re}\,z<-n$ 的 z 的 $\Gamma(z)$ 值，可以由公式

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)},\quad -(n+1)<\text{Re}\,z<-n\leqslant0\qquad(1.5)$$

根据 $\text{Re}(z+n+1)>0$ 的 z 所对应的函数值 $\Gamma(z+n+1)$ 求出。于是

$\Gamma(z)$ 在全部 z 平面上的任意閉区域中，除去使 (1.5) 的分母为零的 z 值外，都是正则函数。使(1.5)的分母为零的 z 值，是 $z=0, -1, -2, \cdots, -n, \cdots$，这些点是 Γ 函数的一阶极点(单极)。

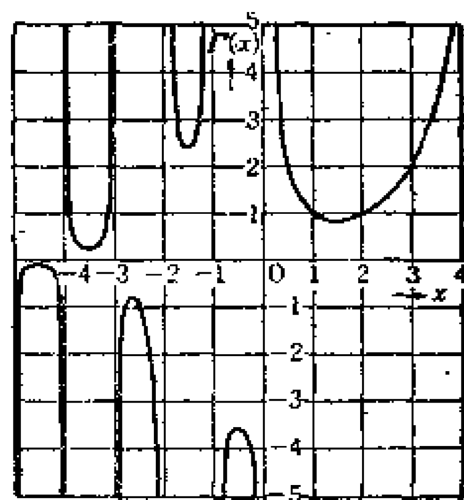


图 1.2

图 1.2 表示的是 z 为实变数时函数 $\Gamma(z)$ 的图象。如果 z 是正的实数，则由(1.1)就知道 $\Gamma(z)>0$，如果 z 是負的，則由(1.5)，它与 $(-1)^{n+1}$ 同符号[③]。此外，当 z 与 $-n\leqslant 0$ 相近时，令 $z=-n+\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$，并且考虑 $\Gamma(1)=1$，則由(1.5)就能导出

$$\Gamma(-n+\varepsilon)=\frac{(-1)^n\Gamma(1+\varepsilon)}{(n-\varepsilon)(n-\varepsilon-1)\cdots(1-\varepsilon)\cdot\varepsilon}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!\,\varepsilon}+O(1), \tag{1.6}$$

这說明 $\Gamma(z)$ 在极 $z=-n\leqslant 0$ 处的留数是 $(-1)^n/n!$.

由以上的討論我們看到，在左半平面中 Γ 函数的极的分布与三角函数 $1/\sin(\pi z)=\operatorname{cosec}\pi z$ 的极的分布完全一样，但是三角函数在右半平面上还有一阶极点为 1, 2, 3, …。由于 $\Gamma(1-z)$ 与 $\Gamma(z)$ 相反，仅在右半平面内以上面这些点为一阶极点，所以可以想象，$\Gamma(1-z)$ 与 $\Gamma(z)$ 的乘积应該与 $\operatorname{cosec}\pi z$ 有密切的关系。事实上，我們考虑 $\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z)$，并且令 $z=\pm n+\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$，则由(1.6)就能得到

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\operatorname{cosec}\pi z}=-z\sin\pi z\Gamma(z)\Gamma(-z)$$

$$=\mp n\pi\varepsilon\cos(n\pi)\,\frac{(-1)^n\Gamma(n)}{n!\,(\mp\varepsilon)}+O(\varepsilon)$$

$$=\pi+O(\varepsilon), \tag{1.7}$$

并且由于 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z$ 对于整数值的 z 是正则的，所以結

果暗示了等式的最后边等于定数 π[4].

現在討論一下两个一般 Γ 函数的乘积 $\Gamma(p)\Gamma(q)$。若設 p,q 的实部都是正的。首先在(1.1)中令 $t=\xi^2$，則得到等式

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^{2z-1}d\xi. \tag{1.8}$$

利用这个公式把乘积 $\Gamma(p)\Gamma(q)$ 写成下面的积分式

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\xi^2+\eta^2)}\xi^{2p-1}\eta^{2q-1}d\xi\,d\eta; \tag{1.9}$$

令 $\xi=r\cos\theta$，$\eta=r\sin\theta$，而把平面的直角坐标系 (ξ,η) 变成极坐标系 (r,θ)，再使用(1.8)，就得到

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$$
$$=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q). \tag{1.10}$$

这里

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta \tag{1.11}$$

叫做 B 函数(Euler 第1种积分)，它是 p, q 的函数。首先，B 函数具有下面的表达形式，卽在(1.11)中令 $\sin^2\theta=t$，則

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt; \tag{1.12}$$

如果令 $\cot^2\theta=x(=(1-t)/t)$，則得到

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx. \tag{1.13}$$

根据上面的定义，当 $\operatorname{Re}p>0$，$\operatorname{Re}q>0$ 时，使用由(1.10)导出的关系式

$$B(p,q)=B(q,p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{1.14}$$

就能对于任意的复变数 p, q，决定它們对应的 B 函数的解析延拓。又由(1.14)可以看到，$B(p,q)$ 关于 p 与 q 是对称函数。这一点指

明，(1.11)～(1.13)各公式的右边并不受 p 与 q 交換的影响。

特别是，如令 $p=1-q$，并且考慮到 $\Gamma(1)=1$，由(1.14)及(1.13)，对于 $0<\operatorname{Re} q<1$ 有

$$I(q)=\Gamma(1-q)\Gamma(q)=B(1-q,q)$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x}dx, \quad 0<\operatorname{Re} q<1. \tag{1.15}$$

这个积分的値可以用下面直接計算的方法求出。現在对函数 $z^{q-1}/(1+z)$，沿着图 1.3 中的路綫进行积分。路綫是由以支点 $z=0$ 为中心的小圓(半徑 ε)与大圓(半徑 R)，以及沿着实数軸的两条方向相反的綫段 EA 与 CD (在 EA 上假設 z 的幅角是 0，而沿着 CD 上 z 的幅角是 2π) 所形成的。当小圓与大圓的半徑分别接近于 0 及无限大时，由两圓所給的积分部分分别是 $O(\varepsilon^q)$，$O(R^{-(1-q)})$ ⑤，而沿着 EA 及 CD 的积分分别成为

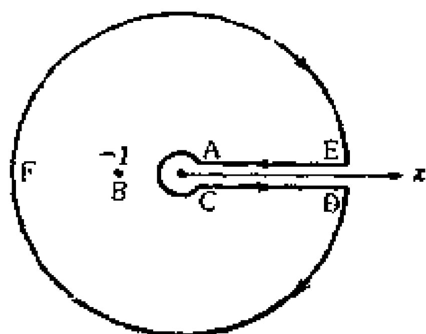


图 1.3

$$\int_\infty^0 \frac{x^{q-1}}{1+x}dx=-I, \quad \int_0^\infty \frac{(xe^{2\pi i})^{q-1}}{1+x}dx=e^{2\pi iq}I. \tag{1.16}$$

但是另一方面，(1.16) 中的总和自然是函数在閉曲綫 $ACDFE$ 内 (由于沿着正实軸作成了割綫，所以 z^{q-1} 是单値函数) 的留数的 $-2\pi i$ 倍。但是函数在这范圍中的极是 $z=e^{\pi i}$，此处的留数是 $e^{(q-1)\pi i}$，所以有

$$(e^{2\pi iq}-1)I=-2\pi ie^{(q-1)\pi i},$$

这样就得到了

$$I=\frac{\pi}{\sin q\pi}. \tag{1.17}$$

根据(1.15) 及 (1.17)可知 z 的正則函数 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)\cdot\sin\pi z$ 在区域 $0<\operatorname{Re} z<1$ 中等于定数 π，又根据一致性定理，当延拓

到 z 平面的全部时，这个函数值也等于 π，这样就說明了(1.7)的推测是正确的。从而导出了关系式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{1.18}$$

現在我們能証明 $\Gamma(z)$ 是沒有零点的函数。否则，如 $\Gamma(z_0)=0$，那么由(1.18)，$\Gamma(1-z_0)$ 应該无限大，即非成立 $1-z_0=-n\leqslant 0$ 不可。但是当 $z_0=n+1$ 时，有 $\Gamma(z_0)=n!\neq 0$，与前面的假設矛盾，故此不合理。这样就可以看到 $1/\Gamma(z)$ 在 z 平面的任意有限域中总是正则函数，即它是整函数。它的零点是 $\Gamma(z)$ 的极，即 $z=0, -1, -2, \cdots$ 等等。

現在在(1.18)中設 $z=\frac{1}{2}$，则 $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$，于是有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \tag{1.19}$$

如果代替 z 取 $z+\frac{1}{2}$，则得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}. \tag{1.20}$$

另外，如在(1.12)中令 $p=q=z$，并且利用 $t(1-t)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2$ 对 $t=\frac{1}{2}$ 是对称的事实，则对于 $B(z,z)$ 有

$$B(z,z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{t(1-t)\}^{z-1}dt ⑧. \tag{1.21}$$

这里，令 $4t(1-t)=u$，则有 $du=4(1-2t)dt=4\sqrt{1-u}\,dt$，于是得到关系式

$$\begin{aligned}B(z,z)&=\frac{1}{2}\;\frac{1}{4^{z-1}}\int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du\\&=2^{1-2z}B\left(z,\frac{1}{2}\right).\end{aligned} \tag{1.22}$$

把这个結果用(1.14)写出的时候就有

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=2^{1-2z}\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)},$$

即

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z). \tag{1.23}$$

这个公式叫做 Γ 函数的倍角公式。

§2 积分表示

在(1.1)中 z 的值是被限制住的。要找到对于随便什么样的自变数 z 的值都成立的 $\Gamma(z)$ 的表达式，可以用复数平面上的积分表示法或是无穷乘积表示法。

首先設 t 是复变数，$t=re^{i\varphi}$，而考虑积分

$$w(z)=\int_C e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{2.1}$$

积分路綫 C 是象图 2.1 中那样，由 $+\infty$ 开始，繞着原点正向旋轉后，再归回 $+\infty$ 的曲綫。这里把 t^{z-1} 写成 $\exp(z-1)(\log r+i\varphi)$，并且象图1.3那样地規定，沿着积分路綫 φ 由 0 变到 2π，則 $e^{-t}t^{z-1}$ 对于 t 是单值正則函数；于是当 z 有限时，对于使积分一致收斂的 z，积分本身就定义了一个 z 的单值函数。

为了看清楚 $w(z)$ 与 Γ 函数的关系，首先考虑 $\operatorname{Re} z>0$ 的情形。把积分路綫 C 变形成为图 2.2 中以原点为中心、ε 为半徑的小圓，以及沿着实軸的两条射綫所成的路綫；則当 $\varepsilon\to 0$ 时，小圓上的积分为 $O(\varepsilon^{\operatorname{Re} z})$ 而趋近于 0。关于对实軸的积分参照着 (1.1)，和 (1.16) 同样地分别是 $-\Gamma(z)$ 及 $e^{2\pi iz}\Gamma(z)$。据此有

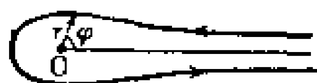


图 2.1

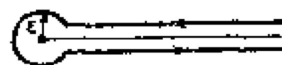


图 2.2

$$w(z)=(e^{2\pi iz}-1)\Gamma(z)=2ie^{\pi iz}\sin\pi z\Gamma(z), \tag{2.2}$$

即得到了

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\pi iz}}{2i\sin\pi z}\int_C e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{2.3}$$

上面的計算是根据 $\mathrm{Re}\, z>0$ 所导出的。使等式两边的 z 过渡到全平面时，从解析延拓的观点来考虑，(2.3) 应該在整个的 z 平面上成立，从而定义了一个 z 的解析函数。把 $1/\sin\pi z$ 用(1.18)的关系代換，并以 $1-z$ 代替 z，即得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=-\frac{e^{\pi iz}}{2\pi i}\int_C e^{-t}t^{-z}dt. \tag{2.4}$$

这个公式直接地表示出 $1/\Gamma(z)$是整函数，它的零点是 $0, -1, -2, -3, \cdots$（只要注意，当 z 是負整数时，被积函数在 C 的內部是正則函数）⑦。

現在观察一下对 B 函数 $B(p, q)$ 的(1.12)施以同样方法后所得到的結果。因为对于任意的 p 与 q，积分在上下限 0 与 1 处是发散的，所以积分路綫必須圍繞着两点并且要避开它們。又因为 0, 1 是被积函数的支点，对于指数 p, q 沒有加特別的限制条件，所以如果把积分路綫取成簡单的閉曲綫时，就不可能要求被积函数的幅角不变地回到原始的情形，从而得到积分所定义的单值函数。因为这些原因，所以象图中表示的那样，有必要把积分路綫 C 取成圍繞在 0 与 1 的两点傍，大約一次正向另一次負向旋轉而具有二重結点的曲綫。这种曲綫 C 是 Riemann 迭面上的曲綫，沿着它的路綫巡繞一周时，被积函数回到原来的值。

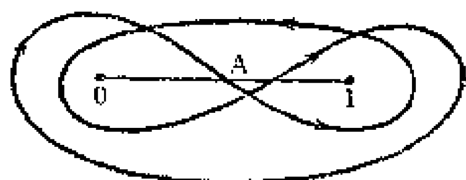


图 2.3

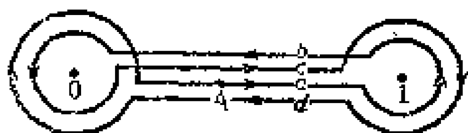


图 2.4

象这样地来討論复积分

$$F(p,q)=\int_C^{(1_+,0_+,1_-,0_-)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt; \qquad (2.5)$$

为了看出当 $\mathrm{Re}\,p>0$, $\mathrm{Re}\,q>0$ 时，它与狭义的定义(1.12)之間的关系，把积分路綫变形成图 2.4 中所表示的由 4 条沿着实軸的綫路，以及两个繞着 0 与 1 的小圓所組成的图形。为了簡单起見，設在图中的 A 点处，z 与 $1-z$ 的幅角都是 0. 由于繞着支点 0, 1 发生了变化，在下面的表中表示出 t 与 $1-t$ 的幅角在实軸 0 的綫段 a, b, c, d 上的值，以及 $t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ 的相应的值。1_+ 表示圍繞着 1 正向旋轉一周，其他符号的意义同。

	a	1_+	b	0_+	c	1_-	d	0_-	$a\cdots$
$\arg t$	0		0		2π		2π		0
$\arg(1-t)$	0		2π		2π		0		0
$\dfrac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{\lvert t\rvert^{p-1}\lvert 1-t\rvert^{q-1}}$	1		$e^{2\pi i(q-1)}$		$e^{2\pi i[(p-1)+(q-1)]}$		$e^{2\pi i(p-1)}$		1

特别，在 $\mathrm{Re}\,p>0$, $\mathrm{Re}\,q>0$ 的情形下，当圍繞着 0 与 1 的小圓半徑趋于 0 时，它們分别所作的积分部分趋于 0. 至于沿着实軸 a, b, c, d 上的积分部分，根据上面的表，就有

$$F(p,\ q)=[1-e^{2\pi iq}+e^{2\pi i(p+q)}-e^{2\pi ip}]\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

卽得到了

$$B(p,q)=\frac{1}{(1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})}F(p,\ q)$$

$$=\frac{1}{(1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})}\int_0^{(1_+,0_+,1_-,0_-)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \qquad (2.6)$$

由于(2.6)的两边对于任意的复数值 p, q 定义了解析函数，故此与 Γ 函数的情形完全一样，得到了对任意 p, q 值的 $B(p,\ q)$ 的表示法。此外，如果 $p-q$ 或 $p+q$ 是整数时，就有可能采用較为簡单的积分路綫(参看 §12) ⑥。

§3 鞍点法与 Γ 函数的渐近展开[9]

Γ 函数以 $z=0, -1, -2, \cdots$ 作为它的极，这些极有聚点，故无限远点是本性奇异点。即 $\Gamma(z)$ 在 $z=\infty$ 的近傍虽则不能展开为收敛的降幂級数，但是能作成漸近展开式。现在先作好准备工作，述說一下积分

$$\int_C e^{\xi f(\tau)} g(\tau) d\tau \tag{3.1}$$

(不失一般性，可設 ξ 是正的实数) 当 $\xi\to\infty$ 时，它的渐近形式得出的方法。为了达到这个目的，使用鞍点法比較便利。

当 ξ 的値相当大时，一般函数 $e^{\xi f(\tau)}$ 的 $\mathrm{Im}(\xi f)$ 沿着积分路綫的变动非常大，在作积分計算时，被积函数在某一处所取的非常大的正的值，将被它在邻近处所取的非常大的負的值所抵消，这种現象并将无数次的反复发生，因此如果不知道 $f(\tau)$ 及 $g(\tau)$ 精确的函数値时，对于积分的估值是困难的。为了避免这种情形，最好选用这样的一条积分路綫，在它上面 $\mathrm{Im}\, f(\tau)$ 是一定的。最理想的情形，如在积分路綫上有一点 $\tau=\tau_0$，在这里 $\mathrm{Re}\, f(\tau)$ 有最大値或是极大値，那么当 $\xi\to\infty$ 时，$|\exp \xi f(\tau)|$ 在 $\tau=\tau_0$ 处具有起决定作用的大的值，于是仅用积分在 $\tau=\tau_0$ 附近的值就得到了(3.1)相当好的近似。把具有这种可能性的点作为积分路綫的端点，则据微分法容易了解沿着积分路綫，$f(\tau)$ 中的 τ 必是滿足

$$f'(\tau_0)=0 \tag{3.2}$$

的点(即在 τ_0 处 $\mathrm{Re}\, f(\tau)$ 具有极値，此外 $\mathrm{Im}\, f(\tau)$ 一定，并且 f 是正則的)[10]。

設 $f''(\tau_0)\neq 0$，则在此点的近傍有

$$\begin{aligned} f(\tau) &\approx f(\tau_0)+\frac{1}{2}f''(\tau_0)(\tau-\tau_0)^2 \\ &= f(\tau_0)+\frac{1}{2}|f''(\tau_0)|s^2 e^{(2\omega+\alpha)i}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

这里 s 是正数，满足关系

$$\tau-\tau_0=se^{i\omega},\quad \alpha=\arg\{f''(\tau_0)\}. \tag{3.4}$$

于是 $|\exp\xi f(\tau)|$ 在通过 τ_0，并且 $\omega=\frac{-\alpha}{2}\left(或是-\frac{\alpha}{2}+\pi\right)$ 的路綫上具有极小值，相反，在与这綫垂直的两条綫，卽 $\omega=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\pi}{2}$ 上，对于 $\tau=\tau_0$ 取极大值①。故此对于复数平面的各点 τ，以 $|\exp\xi f(\tau)|$ 为高作成曲面，曲面在 $\tau=\tau_0$ 的附近形成了鞍狀的形式，因此叫 $\tau=\tau_0$ 为鞍点②。因为在两条綫 $\left(\omega=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\pi}{2}\right)$ 上 $\mathrm{Im}\,f(\tau)=\mathrm{Im}\,f(\tau_0)=$常数，所以根据上面所說的，我們可以这样地选擇积分路綫 L，卽 L 是通过 $|e^{\xi f(\tau)}|$ 取极大値的鞍点 τ_0，然后越过鞍点取方向 $\omega=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\pi}{2}$ 的路綫。

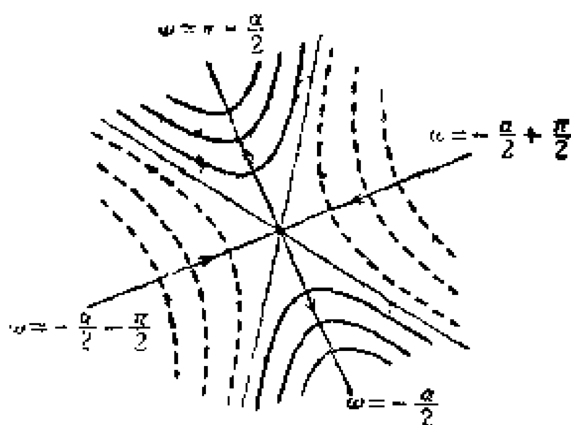


图 3.1

現在，我們首先对积分路綫 C 加以变形，使它变成通过 $\tau=\tau_0$ 点的积分路綫 L，并且在它上面 $\mathrm{Im}\,f(\tau)=\mathrm{Im}\,f(\tau_0)$，$\mathrm{Re}\,f(\tau_0)$ 取极大値。一般地来說，被积函数存在着奇异点，所以由于端点的移动沿着 C 的积分与沿着 L 的积分是不同的，但是在許多的情形中我們容易得到这两个积分的差的估値。現在我們討論一下在 $|e^{\xi f(\tau)}|$ 的最大点 $\tau=\tau_0$ 处的情形。这时，如前面所說的，ξ 相当大时，函数的极大値有压倒的优势，所以沿着 L 的积分是由在 τ_0 近傍的积分值所决定着。現在利用(3.3)把独立变数由 τ 变成 s，并把积分路綫分成两部分，一部分是以 τ_0 为中心、长度为 s 的綫段，另一部分是不包含这狭小范圍的其余部分，并把积分写成

$$\int_L e^{\xi f(\tau)} g(\tau) d\tau = e^{\xi f(\tau_0)} \Big[\int_{\tau_0 - \varepsilon e^{i\omega}}^{\tau_0 + \varepsilon e^{i\omega}} e^{\frac{\xi}{2} f''(\tau_0)(\tau-\tau_0)^2 + O[\xi(\tau-\tau_0)^3]} \cdot \{g(\tau_0)$$

$$+ O(\tau - \tau_0)\} d\tau + O(e^{-\xi\varepsilon^2}) \Big]$$

$$= e^{\xi f(\tau_0)} \Big[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\omega - \frac{\xi s^2}{2} |f''(\tau_0)|} \{1 + O(\xi s^3) + O(s)\}$$

$$g(\tau_0) ds + O(e^{-\xi\varepsilon^2}) \Big].$$

这里不妨选 ε，使 $\varepsilon = \xi^{-\frac{2}{5}}$，則有 $\xi\varepsilon^3 = \xi^{-\frac{1}{5}} \ll 1$，$\xi\varepsilon^2 = \xi^{\frac{1}{5}} \gg 1$，而对剩余項就能作成 $O(\xi^{-\frac{3}{5}})$。現在如把主要項（卽第1項）的积分范圍扩張成由 $-\infty$ 到 $+\infty$，并且略去誤差 $O(e^{-\xi\varepsilon^2})$，而考慮 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}}$ 的話，結果，就得到了所求的漸近値

$$\int_L e^{\xi f(\tau)} g(\tau) d\tau \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, g(\tau_0)}{\sqrt{\xi |f''(\tau_0)|}} e^{i\omega + \xi f(\tau_0)}. \tag{3.5}$$ [13]

現在使用鞍点法来求 $\Gamma(z)$ 当 $z \to \infty$ 时的漸近形式。为了簡便起見，設 z 是正的实数，并在 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ 中令 $t = z\tau$，則

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty e^{z(\log\tau - \tau)} \frac{d\tau}{\tau}, \tag{3.6}$$

若在这里令 $f(\tau) = \log\tau - \tau$，則积分成为 (3.1) 的形狀。由于 $f'(\tau) = \frac{1}{\tau} - 1 = 0$ 时，$\tau = 1$，所以这个点是鞍点，在它的近傍由于

$$f(\tau) \approx -1 - \frac{s^2}{2}, \quad s \equiv \tau - 1,$$

所以

$$\Gamma(z) \sim z^z e^{-z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}zs^2} ds,$$

卽有

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}. \tag{3.7}$$ [14]

这就是所求的漸近式。如果 z 不是实数，那么积分路綫是通过鞍点

$\tau=1$，并且与实数轴作成角等于 $-\frac{1}{2}\arg z$ 的曲线，实行积分以后得到与 (3.7) 同样形式的結果。在 $\mathrm{Re}\,z<0$ 的情形，使用 (2.3) 也能导出漸近式，并且在 $|\arg z|<\pi$ 的限制下与 (3.7) 完全一样。这个漸近式叫做 **Stirling 公式**。

此外，如果要求更精密的漸近式，取一个实变数 t 为独立变数，t 在 $\tau=\tau_0$ 处为零，在 $\tau=\tau_0$ 的附近由負的变到正的值，并且令

$$f(\tau)=f(\tau_0)-t^2. \tag{3.8}$$

对这个 t 导出了 $g(\tau)\,d\tau/dt$ 的展开式后，設

$$g(\tau)\frac{d\tau}{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n, \tag{3.9}$$

利用它就能得到

$$\int_L e^{\xi f(\tau)}g(\tau)\,d\tau\approx e^{\xi f(\tau_0)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi t^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n dt$$
$$=e^{\xi f(\tau_0)}\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)a_{2m}\xi^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)}. \tag{3.10}$$

象这样地来計算 $\Gamma(z+1)$，就得到了精确的漸近展开式

$$\Gamma(z+1)=\sqrt{2\pi}\,z^{z+\frac{1}{2}}e^{-z}\left[1+\frac{1}{12z}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}+\cdots\right]. \tag{3.11}$$

§4 Γ 函数的无限乘积与它的微分

現在来看表示 Γ 函数的解析性质的另一表示方法，即它的无限乘积式。

現在由 (1.5) 式出发。当 n 相当大的时候，使用 Stirling 公式 (3.11)，把 Γ 函数写成

$$\Gamma(z)=\frac{\sqrt{2\pi}\,(z+n)^{z+n+\frac{1}{2}}e^{-(z+n)}}{z(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\times\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

(对分母中反复出現的 $n!$ 总使用(3.11))。

作变形

$$(z+n)^{z+n+\frac{1}{2}}=n^{z+n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\left(1+\frac{z}{n}\right)^{z+\frac{1}{2}}$$
$$=n^{z+n+\frac{1}{2}}e^z\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

并代入上式后，經过約分，則当 $n\to\infty$ 时，就得到了

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}. \qquad (4.1)$$

如果計算 Γ 函数的倒函数，只要注意 $n^{-z}=\exp(-z\log n)$，就有

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}n^{-z}z(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}z\cdot e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}$$
$$=ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}, \qquad (4.2)$$

这里的 γ 是下面的极限值

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\frac{k+1}{k}\right)+\log\frac{n+1}{n}\right\} \qquad (4.3)$$

所定义的常数，叫做 Euler 常数，它的数值是 0.5772156…。

(4.2) 叫做 Weierstrass 表示。这个无限乘积当 z 在有界域中时是一致收斂的；并且 Γ 函数除了以 0, −1, −2, … 为一阶极点以外，表示一个正則函数。这一点很好地反映了 Γ 函数的性质。

Γ 函数的对数微分普通記作 $\psi(z)$，或是 $\psi_1(z)$. 由(4.2)，对于 $\psi(z)$ 有

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+z}\right), \qquad (4.4)$$

另外对于它的微分(普通記作 $\psi_2(z)$)有

$$\psi_2(z)=\psi'(z)=\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^2}, \tag{4.5}$$

一般以

$$\psi_n(z)=\psi^{(n-1)}(z)=(-1)^n(n-1)!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^n} \tag{4.6}$$

为 $\psi_n(z)$ 的定义。这些也叫做重 Γ 函数。

在(4.4)中,如令 $z=n=$ 正整数,那么級数就截到有限項为止

$$\psi(n)=\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=n}=-\gamma+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}, \tag{4.7}$$

作为特殊情形,能得到

$$\psi(1)=\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=1}=-\gamma. \tag{4.8}$$

第2章 偏微分方程的变数分离与特殊函数

§5 变数分离

在古典物理学中或在其他处所遇到的許多問題，在适当的条件下常常可以归結为下列偏微分方程的求解問題：

$$\Delta\Psi=0 \quad (\text{Laplace 方程}), \tag{5.1}$$

$$\Delta\Psi=\frac{1}{a}\ \frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (\text{热傳导方程或扩散方程}), \tag{5.2}$$

$$\Delta\Psi=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad (\text{波动方程}), \tag{5.3}$$

这里

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

如果要研究对时間 t，是按照着 $e^{-\lambda t}$，或是按照着 $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\omega t+\alpha)$ 而变化的解的情形，那么方程(5.2)与(5.3)就取

$$\Delta\Psi+\varkappa\Psi=0 \tag{5.4}$$ ①

的形状，这种方程叫做 Helmholtz 方程。

在量子力学中討論一顆粒子(譬如电子)在力場中的运动时，有必要解 Schrödinger 方程

$$\Delta\Psi+a\{E-V(x,\ y,\ z)\}\Psi=0. \tag{5.5}$$

其中 $V(x,\ y,\ z)$ 是力場的位能，a 是常数，等于 $\frac{2m}{\hbar^2}$.

求(5.1)，(5.4)，(5.5)这样方程的正确解的典型方法，就是所謂变数分离法。这种方法的意义就是对于所求的微分方程的解，根据定义区域的形状，以及函数 $V(x,\ y,\ z)$ 的形状，引入适

当的曲綫坐标

$$\left.\begin{aligned}\xi_1=f_1(x,\ y,\ z),\\ \xi_2=f_2(x,\ y,\ z),\\ \xi_3=f_3(x,\ y,\ z),\end{aligned}\right\}\tag{5.6}$$

然后求形式如

$$\Psi=\Psi_1(\xi_1)\Psi_2(\xi_2)\Psi_3(\xi_3)\tag{5.7}$$

的解。为了使这种变数分离法能够无矛盾地进行，我們只限于討論几种特殊的曲綫坐标 $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$，其中包括球坐标及圓柱坐标等。这样，当变数可能分离时，对于(5.7)中的函数 $\Psi_1(\xi_1)$，$\Psi_2(\xi_2)$，$\Psi_3(\xi_3)$就得了它們所滿足的二阶常微分方程。这种常微分方程有的以初等函数作为它們的解，有的需使用本书所講的各种特殊函数才能得到解。事实上，可以这样地說：为了求解常微分方程，才导致了对特殊函数的研究。

例　球坐标 $(r,\ \theta,\ \varphi)$

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$

对于球对称位能的Helmholtz方程是(見本丛书《几何学》p.85)

$$[\Delta+\varkappa]\Psi\equiv\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\varkappa+\frac{1}{r^2}\Lambda\right]\Psi=0,\tag{5.8}$$

$$\Lambda\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\tag{5.9}$$

令 $\Psi=R(r)\,Y(\theta,\ \varphi)$，代入方程并除以 Ψ/r^2 后，有

$$\frac{r^2}{R}\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\varkappa\right\}R+\frac{\Lambda Y}{Y}=0,$$

因为第一項是仅含 r 的函数，第二項是仅含 $\theta,\ \varphi$ 的函数，所以如果要使上式成立，必須每項都是常数并且它們的和等于零。把常数記作 $\nu(\nu+1)$ 及 $-\nu(\nu+1)$，則 R 及 Y 就分别滿足

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\varkappa-\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\right]R=0,\tag{5.10}$$

$$[\Lambda+\nu(\nu+1)]Y=0.\tag{5.11}$$

此外，設 $Y=\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$，代入上式并除以 $Y/\sin^2\theta$ 后，(5.11)就成为

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta\right)+\nu(\nu+1)\Theta\right]=-\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

于是必須等式的两边都等于定数 m^2，結果 Θ 与 Φ 分別是

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0, \quad (5.12)$$

$$\Phi''+m^2\Phi=0 \quad (5.13)$$

的解。(5.13)的解是指数函数 $e^{\pm im\varphi}$。要解(5.10)及(5.12)，一般要用特殊函数。如令 $\cos\theta=\eta$，方程(5.12)可以写成

$$\frac{d}{d\eta}\left\{(1-\eta^2)\frac{d\Theta}{d\eta}\right\}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right\}\Theta=0. \quad (5.12')$$

§6 椭球坐标

現在討論一下

$$F(\lambda, x, y, z)\equiv\frac{x^2}{\lambda-a_1}+\frac{y^2}{\lambda-a_2}+\frac{z^2}{\lambda-a_3}-1, \quad (6.1)$$

这里 a_1, a_2, a_3 是满足 $a_1>a_2>a_3>0$ 的常数。当 λ 固定时，满足方程 $F=0$ 的 x, y, z 的軌迹是椭球面，或单叶双曲面，或双叶双曲面，分別对应于 $\infty>\lambda>a_1$，$a_1>\lambda>a_2$，$a_2>\lambda>a_3$。但是另一方面，当 x, y, z 的值固定时，$F=0$ 是关于 λ 的三次方程，并且由于 $F(\infty)=-1, F(a_1\pm0)=\pm\infty, F(a_2\pm0)=\mp\infty, F(a_3\pm0)=\pm\infty$，所以明显地方程有三个实根 ξ_1, ξ_2, ξ_3，且 $\infty>\xi_1>a_1>\xi_2>a_2>\xi_3>a_3$。于是当 x, y, z 已給时，也就决定了通过点 (x, y, z) 的三个属于上面三种类型的曲面。相反，如果已給分別属于上面范圍中的三个 λ 值 $\xi_i(i=1, 2, 3)$，它們所对应的三种曲面是

$$F(\xi_i, x, y, z)=0 \quad (i=1, 2, 3),$$

或是

$$\xi_i=\xi_i(x, y, z), \quad (6.2)$$

它們关于 x, y, z 平面都是对称的，并且由它們的一个交点就决定了 x^2, y^2, z^2. 故此把 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 叫做椭球坐标。

现在看一下(6.2)关于 x, y, z 的解。只要注意 $F=0$ 是 λ 的三次方程，它的根是 ξ_1, ξ_2, ξ_3 这个事实，就能对(6.1)进行因式分解，而写成

$$\frac{x^2}{\lambda-a_1}+\frac{y^2}{\lambda-a_2}+\frac{z^2}{\lambda-a_3}-1\equiv\frac{-(\lambda-\xi_1)(\lambda-\xi_2)(\lambda-\xi_3)}{f(\lambda)},$$

$$f(\lambda)=(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3). \tag{6.3}$$

对 (6.3) 乘以 $f(\lambda)$，并把 $\lambda=a_1, a_2, a_3$ 逐一代入，就分别地得到了

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{(\xi_1-a_1)(\xi_2-a_1)(\xi_3-a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \\ y^2=\dfrac{(\xi_1-a_2)(\xi_2-a_2)(\xi_3-a_2)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}, \quad \infty>\xi_1>a_1>\xi_2>a_2>\xi_3>a_3>0 \\ z^2=\dfrac{(\xi_1-a_3)(\xi_2-a_3)(\xi_3-a_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}, \end{cases} \tag{6.4}$$

在后面的不等式中有 $a_1>a_2>a_3>0$, 对应于 x, y, z 是实数这个事实。

现在看一下这种坐标系中綫素公式的求法。由 (6.4) 的对数微分，得到

$$dx=\frac{x}{2}\left[\frac{d\xi_1}{\xi_1-a_1}+\frac{d\xi_2}{\xi_2-a_1}+\frac{d\xi_3}{\xi_3-a_1}\right], \cdots,$$

如果作 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, 则

$$4ds^2=\left[\frac{x^2}{(\xi_1-a_1)^2}+\frac{y^2}{(\xi_1-a_2)^2}+\frac{z^2}{(\xi_1-a_3)^2}\right]d\xi_1^2$$
$$+2\left[\frac{x^2}{(\xi_1-a_1)(\xi_2-a_1)}+\frac{y^2}{(\xi_1-a_2)(\xi_2-a_2)}\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{(\xi_1-a_3)(\xi_2-a_3)}\right]d\xi_1 d\xi_2+\cdots.$$

把－(6.3)对λ微分，并代入$\lambda=\xi_1$，就能得到$d\xi_1^2$的系数为

$$\frac{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)}{f(\xi_1)}.$$

$d\xi_1 d\xi_2$的系数就是$F(\xi_1, x, y, z)-F(\xi_2, x, y, z)$除以$(\xi_2-\xi_1)$，所以根据(6.2)它等于0。于是綫素公式归結为

$$ds^2=\frac{1}{4}\sum_{1,2,3}\frac{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)}{f(\xi_1)}d\xi_1^2. \tag{6.5}$$

求和号下的足碼1, 2, 3意味着这三个数的循环替換。由于这里消去了$d\xi_1 d\xi_2$等的系数，所以表示着(6.2)是正交曲綫坐标。

这时，Helmholtz方程$(\Delta+\varkappa)\Psi=0$归結为

$$\sum_{1,2,3}\frac{\sqrt{f(\xi_1)}}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\sqrt{f(\xi_1)}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_1}\right)+\frac{\varkappa}{4}\Psi=0 \tag{6.6}$$

(見本丛书《几何学》p. 85)，把(5.7)代入上式，并除以Ψ，則得到

$$\sum_{1,2,3}\frac{1}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)}\left[\frac{\sqrt{f(\xi_1)}}{\Psi_1}\frac{d}{d\xi_1}\left(\sqrt{f(\xi_1)}\frac{d\Psi_1}{d\xi_1}\right)\right]$$

$$+\frac{\varkappa}{4}=0. \tag{6.7}$$

由于大括弧内是ξ_i的函数，把它写成$G_i(\xi_i)$，則(6.7)成为下面的形状

$$G_1(\xi_1)(\xi_2-\xi_3)+G_2(\xi_2)(\xi_3-\xi_1)+G_3(\xi_3)(\xi_1-\xi_2)$$

$$=\frac{\varkappa}{4}(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1). \tag{6.8}$$

将(6.8)对ξ_i微分二次后，有

$$G_i''(\xi_i)=-\frac{\varkappa}{2},$$

即
$$G_i(\xi_i)=-\frac{1}{4}(\varkappa\xi_i^2+\alpha_i\xi_i+\beta_i).$$

把它們代入到(6.8)，并且根据每个ξ_i的系数都等于0的条件来决定α_i, β_i，則有$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta$②。即$\alpha$, β对每个

G_i 是一样的，而 $G_i(\xi_i)$ 非成为

$$G_i(\xi_i) = -\frac{1}{4}(\varkappa\xi_i^2 + \alpha\xi_i + \beta) \tag{6.9}$$

不可。于是所有的 $\Psi_i(\xi_i)$ 满足同一形状的微分方程，即

$$\sqrt{f(z)}\frac{d}{dz}\left[\sqrt{f(z)}\frac{dw}{dz}\right] + \frac{1}{4}(\varkappa z^2 + \alpha z + \beta)w = 0, \tag{6.10}$$

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3),$$

这个方程可以写成

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + \frac{1}{z - a_3}\right]\frac{dw}{dz} + \frac{\varkappa z^2 + \alpha z + \beta}{4(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)}w = 0. \tag{6.11}$$

上面所說的椭球，它的半軸依大小順序为 $\sqrt{\xi_1 - a_3} > \sqrt{\xi_1 - a_2} > \sqrt{\xi_1 - a_1}$，根据 a_1，a_2，a_3 的适当的变化，将引起椭球面的延伸与收缩，这样就导出了各种特殊的情形。

例 1 扁长回轉椭球坐标 这时两短軸等长，$\sqrt{\xi_1 - a_1}$ 与 $\sqrt{\xi_1 - a_2}$ 相等。由公式(6.4)，令 $a_1 - a_2 = \varepsilon$，$a_1 - a_3 = l^2$，$\xi_1 = a_3 + l^2\xi^2$，$\xi_2 = a_2 + \varepsilon\sin^2\varphi$，$\xi_3 = a_3 + l^2\eta^2$ ($\xi > 1$，$|\eta| < 1$)，并令 $\varepsilon \to 0$，則得到了以 z 軸为对称軸的扁长回轉椭球坐标系：

$$\left.\begin{aligned} x &= l\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\cos\varphi, & \xi &\geqslant 1, \\ y &= l\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\sin\varphi, & |\eta| &\leqslant 1, \\ z &= l\xi\eta, & 0 &\leqslant \varphi < 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

坐标面 ξ，η，φ 分別是回轉椭球面，回轉双叶双曲面，共軸平面[3]。現在考慮

$$\sqrt{f(\xi_1)} \to l^3\xi(\xi^2 - 1), \quad \sqrt{f(\xi_2)} \to il\varepsilon\cos\varphi\sin\varphi,$$

$$\sqrt{f(\xi_3)} \to l^3\eta(1 - \eta^2), \quad d\xi_1 \to 2l^2\xi d\xi,$$

$$d\xi_2 \to 2\varepsilon\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi, \quad d\xi_3 \to 2l^2\eta\, d\eta\text{[4]},$$

则方程(6.10)分别成为

$$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{d\Xi}{d\xi}\right]+\left(\varkappa l^2\xi^2-\Lambda-\frac{m^2}{\xi^2-1}\right)\Xi=0,\qquad(6.13)$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dH}{d\eta}\right]+\left(-\varkappa l^2\eta^2+\Lambda-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right)H=0,\quad(6.14)$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\Phi+m^2\Phi=0.\qquad(6.15)$$

这里 m, Λ 是分离常数[5]。

例2 要得到扁平回轉椭球，只需在上式中令 $\xi\to i\xi$, $il\to l$ 即可。ξ 的变域是 $0\leqslant\xi<\infty$, $\xi=0$ 是在 $z=0$ 平面上的圆盘。

$$\begin{aligned}x&=l\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\cos\varphi,\\ y&=l\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\sin\varphi,\ z=l\xi\eta.\end{aligned}\qquad(6.16)$$

例3 回轉抛物面坐标　在(6.12)中，把 z 的原点移到 l, 即令 $z=l\xi\eta-l$, 然后再令 $\xi\to\sqrt{1+\frac{\xi^2}{l}}$, $\eta\to\sqrt{1-\frac{\eta^2}{l}}$, 并取 $l\to\infty$, 則有

$$x=\xi\eta\cos\varphi,\ \ y=\xi\eta\sin\varphi,\ \ z=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2).\quad(6.17)$$ [6]

于是(6.13)及(6.14)成为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\Xi}{d\xi}\right)+\left(\varkappa\xi^2-\frac{m^2}{\xi^2}+\lambda\right)\Xi=0,\\ \frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{dH}{d\eta}\right)+\left(\varkappa\eta^2-\frac{m^2}{\eta^2}-\lambda\right)H=0.\end{aligned}\qquad(6.18)$$ [7]

把 ξ^2 或 η^2 写成 t, 并且把 Ξ 与 H 写成 w, 就得到方程

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}+\left(\frac{\varkappa}{4}\pm\frac{\lambda}{4t}-\frac{m^2}{4t^2}\right)w=0.\qquad(6.19)$$

坐标面 ξ 与 η 都是回轉抛物面，并且分别有表达式

$$z=\frac{1}{2}\left(\xi^2-\frac{x^2+y^2}{\xi^2}\right),\quad z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{\eta^2}-\eta^2\right).$$

例4 球与圆柱坐标　在(6.12)中令 $\xi=r/l$, $\eta=\cos\theta$, 当

$l\to 0$ 时，就得到了球坐标

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta. \tag{6.20}$$

如令 $\xi^2=1+r^2/l^2$，$\eta=z/l$，当 $l\to\infty$ 时就得到圆柱坐标

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z. \tag{6.21}$$

方程(6.13)与(6.14)，对于球坐标(6.20)是

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Xi}{dr}\right)+\left(\varkappa-\frac{\Lambda}{r^2}\right)\Xi=0, \tag{6.22}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dH}{d\eta}\right]+\left(\Lambda-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right)H=0. \tag{6.23}$$

对于圆柱坐标是

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Xi}{dr}\right)+\left[\varkappa-\lambda-\frac{m^2}{r^2}\right]\Xi=0, \tag{6.24}$$

$$\frac{d^2H}{dz^2}-\lambda H=0. \tag{6.25}$$

(6.22)，(6.23)，(6.25)，分别与(5.10)，(5.12)，(5.13)相同。

例5 椭圆柱坐标 为了使长轴 ξ_1-a_3 比 ξ_1-a_2，ξ_1-a_2 相当地大，在(6.4)中令 $a_1-a_2=l^2$，$\xi_1=a_2+l^2\xi^2$，$\xi_2=a_2+l^2\eta^2$，$\xi_3=a_3+z(|\xi|>1,\ |\eta|<1)$，并令 $a_1>a_2\to\infty$，要使 x 作为长轴，把 x 与 y 调换后，就得到

$$x=l\xi\eta,\ y=l\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},z=z,\ |\xi|>1,\ |\eta|<1. \tag{6.26}$$

(6.10)对于 $\zeta=\xi,\eta$ 是

$$(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\zeta}\left[(\zeta^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{dw}{d\zeta}\right]+[l^2(\varkappa-a_1)\zeta^2\mp\Lambda]w=0, \tag{6.27}$$

即为

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta-1}+\frac{1}{\zeta+1}\right)\frac{dw}{d\zeta}+\frac{l^2(\varkappa-a_1)\zeta^2\mp\Lambda}{\zeta^2-1}w=0. \tag{6.28}$$

例6 抛物柱坐标 在例5中把 x 的原点移到 l，象例3那样，就得到

$$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\ y=\xi\eta,\ z=z, \tag{6.29}$$

对于 ξ, η, (6.28)就成为

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}+[(\varkappa-\alpha_1)\zeta^2\pm\lambda]w=0. \tag{6.30}$$

如果令 $t=\zeta^2$, 由 $d/d\zeta=2\zeta d/dt=2\sqrt{t}\,d/dt$, 则得

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{1}{2t}\frac{dw}{dt}+\left(\frac{\varkappa-\alpha_1}{4}\pm\frac{\lambda}{4t}\right)w=0. \tag{6.31}$$

§7　常微分方程与它的奇异点

与直角坐标(x,y,z)变换为椭球面坐标(ξ_1,ξ_2,ξ_3)的变换具有奇异点 a_1,a_2,a_3, ∞ 相当,常微分方程(6.11)也在 $z=a_1,a_2,a_3$、∞ 处具有奇异点。对于其他的坐标系来説,同样地也出現有奇异点。可以了解,这里反映了坐标曲面的性质,即問題的几何性质。現在的許多特殊函数是由这种方程的解所导出的。但是在处理这种微分方程时,正象在研究Γ函数时所見到的,在分析它的解析性质与关联性时,把函数作为复变函数处理要比实变函数方便得多。故此下面我們把变数考慮成为复变数。

根据微分方程的理論,对于 z 是复变数的微分方程

$$L[w]=\frac{d^2w}{dz^2}+P(z)\frac{dw}{dz}+Q(z)w=0, \tag{7.1}$$

它在任意一点近傍的解的解析性质,是由系数 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在这一点的解析性质所决定的。下面我們假設 $P(z)$, $Q(z)$ 是仅具有孤立奇异点的函数,并且根据它的奇异点对方程进行分类。这样,我們就能同时得到用微分方程(7.1)所定义的特殊函数的分类。为了述説便利,首先回忆一下微分方程論中的几个結果[2]。

1. 正則点与它近傍的解　使 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 都是正則的点叫做(7.1)的正則点,否則叫做方程的奇异点。对于有限的正則点

$z=z_0$，方程(7.1)具有两个用整幂級数

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{7.2}$$

所表示的独立无关的基本解。它的收敛半徑是 z_0 到与它最近的方程奇异点的距离。要决定 c_n，只要把(7.2)代入到(7.1)，并且令 $z-z_0$ 各次乘方的系数为零即可。

2. 奇异点与它近傍的解 正则点以外的点叫做奇异点。对于孤立奇异点 $z=a$，方程(7.1)具有形状如

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} w_1&=(z-a)^{\lambda_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{1n}(z-a)^n,\\ w_2&=(z-a)^{\lambda_2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{2n}(z-a)^n, \end{aligned} \tag{7.3}$$

或者如

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} w_1&=(z-a)^{\lambda_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{1n}(z-a)^n,\\ w_2&=w_1\log(z-a)+(z-a)^{\lambda_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{2n}(z-a)^n \end{aligned} \tag{7.4}$$

的标准基本解。以 c_n 为系数的 Laurant 級数，在以 a 为中心以距 a 最近的方程奇异点的距离为半徑的圓，与以 a 为中心任意小圓的同心圓环中收斂。决定 c_{1n}，c_{2n} 的具体計算一般是很困难的。

3. 正则奇异点与它近傍的解 奇异点$(z=a)$中使得

$$p(z)=(z-a)P(z),\quad q(z)=(z-a)^2Q(z) \tag{7.5}$$

都是正則的点叫做正則奇异点，否則叫做非正則奇异点。正則奇异点的特征是(7.3)，(7.4)中的 Laurant 級数对于它表現成为整幂級数。于是可以假設所要求的解具有下面这种形式：

$$w=(z-a)^{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{7.6}$$

把它和 $p(z)$，$q(z)$ 的展开式

$$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(z-a)^n,\quad q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(z-a)^n$$

一齐代入(7.1),并且令各次乘方$(z-a)^n$的系数等于0,即能得到它的形状。$(z-a)^\mu$的系数叫做μ的决定方程

$$c_0\phi_0(\mu)=c_0[\mu^2+(p_0-1)\mu+q_0]=0. \quad (7.7)$$

由$(z-a)^{\mu+1}$, … 等的系数,就能得到$c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$的递推公式。首先当$\mu$与$c_0$任意时,$c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$就顺次地可以用$c_0\times(\mu$的函数)来表达,而被决定成为参数$\mu$的函数,即

$$f(z,\mu)=(z-a)^\mu\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\mu)(z-a)^n. \quad (7.8)$$

这里如考虑$c_0\neq0$的情形,则μ就被决定成为(7.7)中的两个根$\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1\geqslant\lambda_2)$,而可能发生下面三种情形。以后把$\lambda_1, \lambda_2$称为关于正则奇异点的解的指数。

(i) $\lambda_1-\lambda_2$不是0或正整数的情形

$$w_j=f(z,\lambda_j)=(z-a)^{\lambda_j}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\lambda_j)(z-a)^n,\ j=1,2. \quad (7.9)$$

(ii) $\lambda_1=\lambda_2[=\lambda]$的情形

$$w_1=f(z,\lambda),\ w_2=\left[\frac{\partial f(z,\mu)}{\partial\mu}\right]_{\mu=\lambda}$$

$$=w_1\log(z-a)+(z-a)^\lambda\sum_{n=1}^{\infty}c_n'(\lambda)(z-a)^n. \quad (7.10)$$

(iii) $\lambda_1-\lambda_2=$正整数的情形

$$w_1=f(z,\lambda_1),\ w_2=\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\{(\mu-\lambda_2)f(z,\mu)\}\right]_{\mu=\lambda_1}$$

$$=Aw_1\log(z-a)+(z-a)^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n. \quad (7.11)$$

(iii)的特殊情形,如$A=0$,则归結成为(i)的情形。前后对比一下,自然会明了(i),(ii),(iii)都属于(2)的特殊情形。这里所出現的整冪級数,不論那一个,都以由a到最近的奇异点的距离作为收斂半徑。

4. 无限远点 把函数考虑成为$\zeta=1/z$的函数,只要討論

$\zeta=0$ 处的性质即可。

由于

$$dw/dz=-\zeta^2 dw/d\zeta,\quad d^2w/dz^2=\zeta^4 d^2w/d\zeta^2+2\zeta^3 dw/d\zeta, \tag{7.12}$$

所以(7.1)归结成为

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}+P^*(\zeta)\frac{dw}{d\zeta}+Q^*(\zeta)w=0, \tag{7.13}$$

$$P^*(\zeta)=\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta^2}P\left(\frac{1}{\zeta}\right),\quad Q^*(\zeta)=\frac{1}{\zeta^4}Q\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{7.14}$$

但 $z=\infty$ 是正则的条件为：$2z-z^2P(z)$，$z^4Q(z)$ 当 $z\to\infty$ 时都正则，簡单地把这条件写成

$$P(z)=\frac{2}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right),\quad Q(z)=O\left(\frac{1}{z^4}\right). \tag{7.14'}$$

又 $z=\infty$ 是正则奇异点的条件为对于 $\zeta=0$，ζP^*，ζ^2Q^* 都正则，即

$$\frac{1}{\zeta}P\left(\frac{1}{\zeta}\right),\quad \frac{1}{\zeta^2}Q\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{7.15}$$

都正则，用 z 来表达，就是当 $z\to\infty$ 时，$zP(z)$，$z^2Q(z)$ 都正则，簡单地写一下，就有

$$P(z)=O\left(\frac{1}{z}\right),\quad Q(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{7.15'}$$

在无限远点近傍的解，就是先求出(7.13)在 $\zeta=0$ 近傍的解，然后以 $\zeta=\frac{1}{z}$ 代入所得到的結果。譬如，对于(7.9)，在无限远点的近傍，具有指数为 λ_j 的基本解，可以写成下面的形式：

$$w_j=\zeta^{\lambda_j}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^*(\lambda_j)\zeta^n=z^{-\lambda_j}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^*(\lambda_j)z^{-n}. \tag{7.16}$$

这里希望讀者注意，z 的幂指数是 $-\lambda_j$。

例 具有一个正则奇异点的方程是

$$w''+\frac{2}{z-a}w'=0. \tag{7.17}$$

根据(7.5)知道 $z=a$ 是正则奇异点 $(p(z)=2)$，由(7.14)可知，无限远点是正则点$\left(\frac{2}{z-a}=\frac{2}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$. 所以两个基本解是

$$w_1=1, \quad w_2=\frac{1}{z-a}. \tag{7.18}$$

对于 $z=a$，指数的决定方程(7.7)是 $\mu^2+\mu=0$，(根为0与 -1)。这里因子2非常重要，因为如果取成别的数，例如 α 的話，那么 w_2 就成为 $(z-a)^{-\alpha+1}$ $(\alpha\neq1)$，或是 $\log(z-a)$ $(\alpha=1)$．一般情形 $z=\infty$ 也成了正则奇异点(参照(7.8)与(7.9))。α 除了是1及2以外相当于(7.11)的特殊情形。

此外，如在(7.17)中，a 等于 ∞，则方程 $w''=0$ 的基本解是

$$w_1=1, \quad w_2=z,$$

所决定的解的指数是0与 -1.

§8 Riemann P 函数与超几何方程

具有三个正则奇异点 $a_j(j=1, 2, 3)$，其中沒有无限远点，并且此外再沒有其他的奇异点的微分方程，必能写成下面的形状：

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\sum_{j=1}^{3}\frac{1-\lambda_j-\lambda_j'}{z-a_j}\frac{dw}{dz}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\lambda_j\lambda_j'(a_j-a_k)(a_j-a_l)}{(z-a_j)^2(z-a_k)(z-a_l)}w=0. \tag{8.1}$$

$a_k\neq a_l$ 是 a_j 以外所余的2点，六个参数 λ_j 与 λ_j' 是关于 a_j 的解的指数。此外还必須满足关系式

$$\sum_{j=1}^{3}(\lambda_j+\lambda_j')=1. \tag{8.2}$$

λ_j 及 λ_j' 是 a 关于 a_j 的指数的这个事实，只要注意 $p(a_j)=1-\lambda_j-\lambda_j'$，及 $q(a_j)=\lambda_j\lambda_j'$，由(7.5)及(7.7)自然会了解。并且为使(7.14)对于 $P(z)$，$Q(z)$ 不作为另外附加的条件，故此給了条件(8.2)。这样就确实保証当 $z\to\infty$ 时，$P(z)$ 成为 $\frac{2}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$，$Q(z)$ 成为 $O\left(\frac{1}{z^4}\right)$，即满足了(7.14′)[10]。

方程(8.1)的一般解是由满足关系式(8.2)的 λ_j 与 $\lambda_j'(j=1,$

2, 3), 以及 a_1, a_2, a_3 所唯一决定的，因此把解記作

$$w=P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & z \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' & \end{matrix}\right\}, \tag{8.3}$$

它叫做 Riemann P 函数。(8.3) 与 (8.1) 是完全等价的关系式。这里所称的 P 函数无疑指的是 (8.1) 的解的全体，其中第 1 行表示的是奇异点的位置，第 2，第 3 行表示的是在奇异点处的两个指数。自然，在这个表中如列与列交换，則作为解的函数不变，对于行与行的交换，譬如 λ_j 与 λ_j' 交换，函数也不变。除此以外，(8.3) 具有下面这些容易知道而且重要的性質。

1. 1 次变换 假設变换

$$\zeta=\frac{Az+B}{Cz+D}\quad (AD-BC\neq 0) \tag{8.4}$$

把点 $z=a_1, a_2, a_3$ 分别地映于点 $\zeta=\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，則

$$P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & z \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \zeta \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' & \end{matrix}\right\}. \tag{8.5}$$

略証如下。(8.4) 能够写成

$$\zeta=\frac{A}{C}\cdot\frac{z+\dfrac{B}{A}}{z+\dfrac{D}{C}}=\frac{A}{C}\left[1+\frac{\dfrac{B}{A}-\dfrac{D}{C}}{z+\dfrac{D}{C}}\right], \tag{8.6}$$

所以可以把变换看成是由 $z\to\frac{1}{z}$, $z+\alpha\to z$, $\beta z\to z$ 三种变换接連实施的結果。因此只要証明微分方程 (8.1) 的形状在每个变换下都是不变的就够了。由于后面二种情形比較明显，因而只討論一下 $\zeta=\frac{1}{z}$ 的情形。由于 (7.13) 及 (7.14)，設关于 ζ 的方程的系数函数是 $P^*(\zeta)$ 及 $Q^*(\zeta)$，幷由 $a_j=\frac{1}{\alpha_j}$, $\frac{-\alpha_j}{\zeta(\zeta-\alpha_j)}=\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta-\alpha_j}$，再注意

(8.2)后，立刻就能得出

$$P^*(\zeta)=\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{1-\lambda_j-\lambda_j'}{\dfrac{1}{\zeta}-\dfrac{1}{\alpha_j}}=\sum_{j=1}^{3}\frac{1-\lambda_j-\lambda_j'}{\zeta-\alpha_j}. \quad (8.7)$$

用观察法就能看出，$Q^*(\zeta)$ 就是在 $Q(z)$ 中令 $z\to\zeta$，$a_j\to\alpha_j$ 所得到的結果。

对于无限远点，可以把它看成是与任意有限点完全同等的点。所以允許对三个奇异点作任意的移动，自然，仍要用前节的定义来解釋指数与正則性。

2. 成立着下面的等式

$$\left(\frac{z-a_1}{z-a_3}\right)^k P\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & z \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \lambda_1+k & \lambda_2 & \lambda_3-k & z \\ \lambda_1'+k & \lambda_2' & \lambda_3'-k & \end{Bmatrix}. \quad (8.8)$$

証明 关于指数的变化，由定义并观察(8.8)自然能够明了[1]，所以我們只要指出，等式的左边表示一个以 a_1，a_2，a_3 为正則奇异点的 P 函数即可。

令 $w=f(z)w_1$，$f(z)=(z-a_3)^k/(z-a_1)^k$. 把 w 代入到它所滿足的微分方程(8.1)后，作成 w_1 所滿足的微分方程，就得到

$$w_1''+\left[P(z)+\frac{2f'}{f}\right]w_1'+\left[Q(z)+\frac{f''}{f}+P(z)\frac{f'}{f}\right]w_1=0. \quad (8.9)$$

对于平面中的有限点，由于 $\dfrac{f'}{f}$ 仅在 a_1, a_3 处有一阶极点，$\dfrac{f''}{f}$ 在同处有二阶极点，所以除去正則奇异点 a_1，a_2，a_3 以外全部是正則点。至于无限远点，由于 $P(z)\to\dfrac{2}{z}+O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$，$Q(z)\to O\left(\dfrac{1}{z^4}\right)$，$f\to 1+\dfrac{c}{z}+O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$，$f'\to-\dfrac{c}{z^2}+O\left(\dfrac{1}{z^3}\right)$，$f''\to\dfrac{2c}{z^3}+O\left(\dfrac{1}{z^4}\right)$，$c=k(a_1-a_3)$，結果也是正則点，故此(8.8)是 P 函数。

作为上面的推論，我們举出

$$(z-a_1)^k P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \infty & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & z \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \lambda_3' & \end{matrix}\right\} = P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \infty & \\ \lambda_1+k & \lambda_2 & \lambda_3-k & z \\ \lambda_1'+k & \lambda_2' & \lambda_3'-k & \end{matrix}\right\}. \qquad (8.10)$$

这个公式,譬如可对(8.8)的左边乘以$(-a_3)^k$(自然还是 P 函数),然后令 $a_3\to\infty$ 即可导出。

接連利用上面的性質就能把(8.1)的解变成更为标准的形式。

首先接連地用(8.8),把 a_1, a_2 的指数一齐变成0, 即

$$w=\frac{(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}}{(z-a_3)^{\lambda_1}(z-a_3)^{\lambda_2}} \cdot P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ 0 & 0 & \lambda_3+\lambda_1+\lambda_2 & z \\ \lambda_1'-\lambda_1 & \lambda_2'-\lambda_2 & \lambda_3'+\lambda_1+\lambda_2 & \end{matrix}\right\}. \qquad (8.11)$$

然后再用1次变换

$$\zeta=\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\cdot\frac{z-a_1}{z-a_3} \qquad (8.12)$$

把右边 P 函数的奇异点位置移到 $\zeta=0, 1, \infty$。这时可利用(8.5)。加以整理后,就能把(8.1)的解表示成为

$$w=\frac{(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}}{(z-a_3)^{\lambda_1+\lambda_2}} \cdot P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \lambda_3+\lambda_1+\lambda_2 & \dfrac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\cdot\dfrac{z-a_1}{z-a_3} \\ \lambda_1'-\lambda_1 & \lambda_2'-\lambda_2 & \lambda_3'+\lambda_1+\lambda_2 & \end{matrix}\right\}. \qquad (8.13)$$

在右边的 P 函数中,我們只观察到4个参数,并且由于关系式(8.2),其中只有3个是任意的。如果設 ∞ 处的指数是 α 与 β, 0 处的指数是0与 $1-\gamma$, 則1处的一个指数必定是 $1-(\alpha+\beta+1-\gamma)=\gamma-\alpha-\beta$。因此具有3个正則奇异点的微分方程的一般解,能够归結成为下面的标准形式,即

$$w=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\}. \qquad (8.14)$$

比较(8.1)，(8.3)与(8.14)，就得到了它所满足的微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left[\frac{\gamma}{z}+\frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1}\right]\frac{dw}{dz}+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}w=0, \quad (8.15)$$

容易了解，它还可以写成

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0. \quad (8.16)$$

这个方程叫做超几何方程。

§9　合流型超几何方程

把(8.14)中的奇异点0固定，再令奇异点1与∞趋于一致，并且把这二重点作为∞。因为这样的定义与两个奇异点趋于一致的方式无关，故可首先令 $z=\frac{\zeta}{\beta}$，把奇异点移到 $\zeta=0,\beta,\infty$。这时对(8.16)除以 $\beta\zeta$ 后，就有

$$\left(1-\frac{\zeta}{\beta}\right)\frac{d^2w}{d\zeta^2}+\left(\frac{\gamma}{\zeta}-\frac{\alpha+\beta+1}{\beta}\right)\frac{dw}{d\zeta}-\frac{\alpha}{\zeta}w=0,$$

然后令 $\beta\to\infty$，得到

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}-\left(1-\frac{\gamma}{\zeta}\right)\frac{dw}{d\zeta}-\frac{\alpha}{\zeta}w=0. \quad (9.1)$$

这时正则奇异点 β 与 ∞ 合流，而产生了非正则奇异点 $\zeta=\infty$。方程(9.1)叫做合流型超几何微分方程。

現在考虑以 $z=0$ 为正则奇异点，$z=\infty$ 为非正则奇异点的一般微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(a+\frac{b}{z}\right)\frac{dw}{dz}+\left(c+\frac{d}{z}+\frac{e}{z^2}\right)w=0. \quad (9.2)$$

由于当 $z\to\infty$ 时，方程(9.2)成为常系数的方程，而有指数型的解，所以可以設

$$w=z^q e^{pz}v(z) \quad (9.3)$$

而試求 $v(z)$ 所满足的微分方程。現在把

$$\frac{dw}{dz}=\left[\frac{dv}{dz}+\left(p+\frac{q}{z}\right)v\right]z^q e^{pz},$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\left[\frac{d^2v}{dz^2}+2\left(p+\frac{q}{z}\right)\frac{dv}{dz}+\left(p^2+\frac{2pq}{z}+\frac{q(q-1)}{z^2}\right)v\right]z^q e^{pz}$$

代入(9.2)，并約去 $z^q e^{pz}$，就得到了与(9.2)同类型的方程

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left(2p+a+\frac{2q+b}{z}\right)\frac{dv}{dz}+\left\{p^2+ap+c+\frac{2pq+aq+bp+d}{z}+\frac{q^2-q+bq+e}{z^2}\right\}v=0. \quad (9.2')$$

这里特别值得注意的是，把(9.3)代入后，方程(9.2)的形状是不变的。

现在用下列二式决定 p, q:

$$p^2+ap+c=0,\ q^2-q+bq+e=0 \quad (9.4)$$

(設 $p=p_1, p_2,\ q=q_1, q_2$)，并引入新独立变数

$$\zeta=-(a+2p)z, \quad (9.5)$$

結果(9.2)就化成为下列的合流型超几何方程:

$$\frac{d^2v}{d\zeta^2}-\left(1-\frac{b+2q}{\zeta}\right)\frac{dv}{d\zeta}-\frac{aq+bp+d+2pq}{(a+2p)\zeta}v=0 \quad (9.6)$$

$\left(这里\ \alpha=\frac{aq+bp+d+2pq}{a+2p},\ \gamma=b+2q\right)$.

如 $p=-\frac{a}{2}$，由(9.4)即有 $c=\frac{a^2}{4}$ 的特殊情形，这时，对于 v，方程(9.2)取下面的特殊形状:

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{\tilde{b}}{z}\frac{dv}{dz}+\frac{\tilde{d}}{z}v=0,\ \tilde{b}=b+2q,\ \tilde{d}=pb+d. \quad (9.7)$$

令 $z=t^2$，就得到

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{2\tilde{b}-1}{t}\frac{dv}{dt}+4\tilde{d}v=0.$$

此外，如果假定

$$v=t^{\tilde{q}}e^{\tilde{p}t}\tilde{v},$$

比較(9.2)与(9.2')，就有

$$\tilde{p}^2+4\tilde{d}=0,\quad \tilde{q}^2-\tilde{q}+(2\tilde{b}-1)\tilde{q}=0,$$

从而能决定 $\tilde{p}=\pm 2i\sqrt{pb+d}$，$\tilde{q}=0$. 再令 $\zeta=-2\tilde{p}t$，就得到 $\tilde{v}$ 所满足的合流型超几何方程

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\zeta^2}-\left(1-\frac{2b+4q-1}{\zeta}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\zeta}-\frac{2b+4q-1}{2\zeta}\tilde{v}=0.$$

所以原方程的解可以表达成为

$$w=z^q e^{pz+\tilde{p}\sqrt{z}}\tilde{v}(-2\tilde{p}\sqrt{z}). \tag{9.8}$$

另外，当 $z\to\infty$ 时，假設在第一种情形中$\left(\text{即 } c\neq\frac{a^2}{4}\text{ 时}\right)$，(9.2')的解的形状是

$$v=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots,$$

由 z^0, z^{-1}, … 的系数，就能得到

$$(p^2+ap+c)a_0=0,\quad (2pq+aq+bp+d)a_1=0,\ \cdots,$$

即可有下面的关系

$$p=p_1,\ p_2:\ p_1p_2=c,\quad p_1+p_2=-a, \tag{9.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &q=-\nu_1,\ -\nu_2:\quad \nu_i=\frac{d+bp_i}{a+2p_i}\\ &\text{此外，有 } d \text{ 的表达式为}\qquad d=\nu_i(a+2p_i)-bp_i.\end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

对于这种 p_i 与 ν_i 的值，由正則奇异点 0 近傍的决定方程 $\lambda(\lambda-1)+b\lambda+e=0$ 就能决定指数 λ_1, λ_2,

$$\lambda_1,\ \lambda_2:\ \lambda_1\lambda_2=e,\quad \lambda_1+\lambda_2=1-b. \tag{9.11}$$

这一点非常重要，因为这样当 a, b, c, d 已知时，就可利用(9.9)～(9.11)六个公式唯一地决定这 6 个 p_i, ν_i 与 λ_i. 并且 ν 与 λ 之間，考虑条件 $\nu_1\neq\nu_2$ 的話，还成立着关系式

$$\nu_1+\nu_2+\lambda_1+\lambda_2=1. \tag{9.12}$$ [12]

相反，如果已給了 p_1, p_2 以及满足(9.12)的 λ_1, λ_2, ν_1, ν_2，那么也可以由(9.9) ~ (9.12)唯一地决定 a, b, c, d, e 的值。对应于 Riemann P 函数，可以把(9.2)的解写成

$$w=\widetilde{P}\left\{\begin{matrix} \overbrace{\quad\infty\quad} & 0 & \\ p_1\nu_1 & \lambda_1 & z \\ p_2\nu_2 & \lambda_2 & \end{matrix}\right\}. \tag{9.13}$$

这里的記号 ∞，意味着 $w\infty e^{p_i z}z^{-\nu_i}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$，并且当 p_i 与 ν_i 的行交换时，两个函数就相互交换。此外，根据(9.2′)容易明了 $w_1=e^{\alpha z}z^{\beta}w$ 也可以用 $\widetilde{P}$ 的形式表达，即成立着等式

$$e^{\alpha z}z^{\beta}\left\{\begin{matrix} \overbrace{\quad\infty\quad} & 0 & \\ p_1\nu_1 & \lambda_1 & z \\ p_2\nu_2 & \lambda_2 & \end{matrix}\right\}=\widetilde{P}\left\{\begin{matrix} \overbrace{\qquad\infty\qquad} & \overbrace{\quad 0\quad} & \\ p_1+\alpha\ \ \nu_1-\beta & \lambda_1+\beta & z \\ p_2+\alpha\ \ \nu_2-\beta & \lambda_2+\beta & \end{matrix}\right\}. \tag{9.14}$$ [13]

至于(9.1)的解，考虑了(9.9) ~ (9.13)后，由 $a=-1, b=\gamma, c=0, d=-\alpha, e=0$ 就得 $p_1=0, p_2=1, \nu_1=\alpha, \nu_2=\gamma-\alpha, \lambda_1=0, \lambda_2=1-\gamma$，所以解可以写成

$$w=\widetilde{P}\left\{\begin{matrix} \overbrace{\qquad\infty\qquad} & 0 & \\ 0\qquad\alpha & 0 & z \\ 1\quad\gamma-\alpha & 1-\gamma & \end{matrix}\right\}. \tag{9.15}$$

§ 10 各种特殊函数

实用上常常出現的用微分方程来定义的特殊函数，可根据它們奇异点的性质，也就是它們所由定义的微分方程奇异点的性质而分成下面的三种类型。

1. 超几何函数型 这种函数經常有三个正則奇异点(普通是 0, 1, ∞，或是 ± 1, ∞)。根据 Riemann P 函数的理論，經过变数

变換后，可以归結成为超几何函数或是它的特殊情形。

例 球函数时的解在(6.13),(6.14)中，$\varkappa=0$，即或是(6.23)的解，它們在一般的情形就是超球函数(Gegenbauer 函数)。如果設解是多項式，非常好用的多項式就是 Jacobi 多項式，它的特殊情形是 Gegenbauer 多項式。此外，特殊化后还包括有 Legendre 多項式与 Tschebyscheff 多項式。

2. 合流型超几何函数型 这种函数經常有一个正則奇异点(普通为 0)，以及一个由二个正則奇异点合流以后，如(9.2)型的非正則奇异点(普通为 ∞)，一般归結为合流型超几何方程(9.1)或方程(9.2)的解。

例 下面列举几个定义这种函数的方程。

(1) 圓柱函数，即(6.18)中 $\varkappa=0$，或(6.24)。

(2) 拋物柱函数，方程(6.31)。

(2)′ Weber 函数，方程(6.30)，在有限区域中正則，∞ 是高度的非正則奇异点。

(3) 回轉拋物面波动函数，方程(6.18)。

(3)′ Coulomb 波动函数：Coulomb 力場中电子的 Schrödinger 方程，用球坐标或是回轉拋物面坐标，分离变数以后所得到的方程。

此外还有蜕化成为指数函数或是多項式的解。

(1) 中有球 Bessel 函数。

(2), (2)′ 中有 Hermite 多項式。

(3), (3)′ 中有 Laguerre 多項式。

另外，属于类型 2. 的函数还很多，譬如不完全 Γ 函数，誤差函数，Fresnel 积分，以及指数积分等。

3. 椭球面函数型 这种函数具有至少四个正則奇异点；或至少二个正則奇异点及一个非正則奇异点。

例	(1) 椭球面函数(6.11)	a_1, a_2, a_3 正則奇异点， ∞ 非正則奇异点。
	(2) Láme 函数(椭球調和函数)	在上式中 $\varkappa=0$ 时，a_1, a_2, a_3, ∞ 是正則奇异点。
	(3) 抛物面函数	在上面的情形中，使 a_1 与 ∞ 合流。
	(4) 回轉椭球函数(6.13)，(6.14)，(6.16)	± 1(或是 $\pm i$) 为正則奇异点， ∞ 是非正則奇异点。
	(5) Mathieu 函数(椭圓柱函数)(6.28)	± 1 正則奇异点， ∞ 非正則奇异点。

这种类型自然包含了全部的 1, 2 类型作为特别情形，如果把这种类型的求法与 1, 2 的情形比較，由于后面二种类型的函数可以用遞推公式或是积分表示来系統的处理，而第 3 类型的問題就要困难得多。譬如，第 3 类型函数的整冪級数展开式的一般項就非常复杂，并且对它們不存在簡单的积分表示法。最后，我們上面所説的所有函数，都可以看作是椭球面函数或是 Láme 函数的特例，由这种观点来看特殊函数的理論也构成了一个完整的体系。

第3章 超几何函数

§11 超几何函数

超几何方程,又叫 Gauss 方程,即方程 (8.16)

$$L_z[w]\equiv z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0, \tag{11.1}$$

它以 0, 1, ∞ 为正则奇异点,它的一般解利用 Riemann 写法 (8.14),可以記作

$$w=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}. \tag{11.2}$$

我們在前一章中已經講过,一般具有三个正則奇异点的微分方程的解可以由(11.2)导出。

(11.2)在 $z=0$ 近傍的特解,除去 γ =整数的情形,一个是具有指数 $\mu=0$ 的正則解,另一个的指数 $\mu=1-\gamma$,而具有 $z^{1-\gamma}\times$ 整冪級数的形状。为了求出第一个解,根据(7.6)令

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{n+\mu}, \tag{11.3}$$

并令 $\mu=0$,而代入到方程 (11.1),使 z 的各次乘方(z^n)的系数为零,这样,就得到了遞推公式

$$(n+1)(n+\gamma)a_{n+1}=(n+\alpha)(n+\beta)a_n, \tag{11.4}$$

再設 $z=0$ 时,$w=1$,則有 $a_0=1$,这样,逐次求出 a_n,有

$$a_0=1,\ a_1=\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma},\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta+n)/\Gamma(\beta)}{n!\Gamma(\gamma+n)/\Gamma(\gamma)}. \tag{11.5}$$

把这样得到的整冪級数記作 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$，这个級数叫做超几何級数，也叫做 Gauss 級数。即

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\Gamma(\gamma+n)}z^n. \tag{11.6}$$

超几何級数实际是一个无限級数，并以 1 作为收斂半徑[1]。$z=1$ 是(11.1)的奇异点，所以也是解的奇异点，这个事实也能用 Cauchy 判定法由級数(11.6)驗明。所以这个級数的和在单位圓的內部定义了一个正則的解析函数

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z),$$

我們把它命名为超几何函数。

对于 $|z|>1$ 的情形，只要考虑(11.6)的解析延拓卽可，我們将在后面述説。由于 $z=1$ 是支点，所以这个函数一般是多值函数。为了研究的方便，可以由 $z=1$ 起沿着实軸到另一个支点 ∞ 作一剖綫，然后化成单值函数的情形。

如果 α 或 β 为 0 或負整数 $(-n)$，由 (11.4) 自然可以了解，級数一般将在有限項处截断，而成为多項式（Jacobi 多項式）。如果 γ 是 0 或是負整数 $(-m)$，而 α, β 限定不是負整数 $(-n,\ n\leqslant m)$ 时，則系数 a_{m+1} 将成为 ∞，对于指数 0 不存在正則的解。以后不再重复申明总把这种情形作为例外，而不予考虑。

記法 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 是由于超几何級数的扩張情形而引进的，超几何級数的扩張情形的写法为[2]

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \cdots, \alpha_p; \beta_1, \cdots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!}, $$

$$ (\alpha)_n = \alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha). \quad (11.7) $$

为了避免与 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ 的記法混淆，以后一致采用后面的写法。

現在来求方程(11.1)在 $z=0$ 近傍具有指数 $1-\gamma$ 的另一个特解。它自然可以在 (11.3) 中令 $\mu=1-\gamma$，然后代入方程 (11.1) 通过系数的决定而得到②。这里我們用另一个方法，即令 $w=z^{1-\gamma}f(z)$，并試求正則函数 $f(z)$ 所满足的微分方程。这时，利用 (8.10)，可以把一般解簡写成

$$ P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix} $$

$$ = z^{1-\gamma} P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha+1-\gamma & z \\ -1+\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta+1-\gamma & \end{Bmatrix}. \quad (11.8) $$

但是第二个 P 函数是在第一个中把 α, β, γ 分别代以 $\alpha-\gamma+1$, $\beta-\gamma+1$, $2-\gamma$ 而得到的，这样就說明了第二个特解是

$$ w_2 = z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z). \quad (11.9) $$

又对于一般解 (11.8)，根据 (8.10) 可以直接写成

$$ (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma-\beta & z \\ 1-\gamma & -\gamma+\alpha+\beta & \gamma-\alpha & \end{Bmatrix} $$

$$ = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 1-\beta & z \\ -1+\gamma & -\gamma+\alpha+\beta & 1-\alpha & \end{Bmatrix}, $$

于是可以了解

$$w_3=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha;\ \gamma;\ z)\ (=F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)),$$

$$w_4=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\beta,\ 1-\alpha;\ 2-\gamma;\ z) \tag{11.10}$$

也是方程(11.1)的特解。但是由于$F(\alpha,\beta;\gamma;0)=1$，因此考虑了这个函数在$z=0$近傍的情形后，便能断定，前者就是$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$，后者明显地是与$w_2$一致的。

要求在$z=1$近傍的解，可以利用(8.5)。令$z-1=\zeta$，就使点$\zeta=0,1,\infty$分别地与点$z=1,0,\infty$对应。考虑到解在这些点的指数分别是$0,\ \gamma-\alpha-\beta;\ 0,\ 1-\gamma;\ \alpha,\ \beta$（对于$z$与$\zeta$，对調0与1处的指数），于是就可以把一般解写成下面的形式

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & \zeta \\ \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \beta & \end{Bmatrix},$$

与(11.2)，(11.8)比較，就能得出两个独立的解

$$w_5=F(\alpha,\ \beta;1-\gamma+\alpha+\beta;\zeta)=F(\alpha,\ \beta;1-\gamma+\alpha+\beta;1-z),$$

$$w_6=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha;1+\gamma-\alpha-\beta;1-z). \tag{11.11}$$

象$w_1\to w_3,\ w_4$那样，就得到了与$w_3,\ w_4$相当的解

$$w_7=z^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,\ 1-\gamma+\beta;\ 1-\gamma+\alpha+\beta;\ 1-z)=w_5,$$

$$w_8=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,\ 1-\beta;\ \gamma+1-\alpha-\beta;\ 1-z)=w_6. \tag{11.12}$$

最后求在$z=\infty$近傍的解，把z写成$z=\dfrac{1}{\zeta}$，由(8.5)，(8.10)（只要把0与∞的地位調換）能够得到

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & 0 & 0 & \zeta \\ \beta & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \end{Bmatrix}=\zeta^{\alpha}P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & \zeta \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma+\alpha & \end{Bmatrix},$$

从而有

$$w_9=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ 1-\gamma+\alpha;1-\beta+\alpha;\ \frac{1}{z}\right)=w_{11}$$

$$=z^{\beta-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\ \gamma-\beta;1+\alpha-\beta;\frac{1}{z}\right). \quad (11.13)$$

另外一个独立的解,可以把 α 与 β 对調而得到,即

$$w_{10}=z^{-\beta}F\left(\beta,\ 1-\gamma+\beta;\ 1-\alpha+\beta;\ \frac{1}{z}\right)=w_{12}$$

$$=z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha,\ \gamma-\alpha;\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{z}\right). \quad (11.14)$$

一般使 0, 1, ∞ 三点相互换置的 1 次变换共有六种,即

$$\zeta=z,\ 1-z,\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{1-z},\ \frac{z-1}{z}=1-\frac{1}{z},\ \frac{z}{z-1}=1-\frac{1}{1-z}.$$

如果利用关系式(8.4) 与 (8.5)等,同样地就能把方程(11.1)的解表达成为以这些 ζ 作独立变数的超几何函数。但是对于每个ζ,根据 (11.6), (11.9), (11.10) 可以得到四种解的表达式,所以方程 (11.1) 的解,可以有 24 种方法用超几何函数来表达,但是其中只有两个是独立的,其他的都是这两个解的綫性組合[4]。这些一次关系的系数可以通过具体計算求出,从而能把一个奇异点近傍的解表示成为其他奇异点近傍解的适当的綫性組合。这一点与解的解析延拓的关系非常密切,我們将在 § 13 中討論。

§ 12 积分表示

整冪級数的展开式只适用于討論函数在局部范圍的情形,而不能够借此得到全局的解析性质。一般用积分表示来討論大范圍的性质比較便利。要得到积分表示通常有两种方法。第一种是把整冪級数适当变形的方法,另一种是利用一个已給的适当的函数作为核 $k(z,\ t)$,而对解用变换式

$$w(z)=\int_C k(z,\ \zeta)v(\zeta)d\zeta \quad (12.1)$$

加以变换,并且要这样的选擇 $v(\zeta)$ 与 C 使之滿足 w 的微分方程,

从而得到积分表示的方法。

現在先考慮第一种方法。(11.6) 具有形状如 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G(n)}{n!}z^n$。我們把这种級数形式想象为，对 $G(\zeta)z^{\zeta}$ 乘以一个在 $\zeta=n$ 处具有留数是 $1/n!$ 的函数，然后沿着一条把 $n=0, 1, 2, \cdots$ 各点包含于內部的閉曲綫 C 作积分，积分的結果即为这个級数。由于 $\Gamma(-\zeta)$ 根据 (1.6) 以点 $\zeta=n$ 为单极，并且有留数 $(-1)^{n+1}/n!$，所以它恰好是适合这个条件的函数。积分路綫 C 可以取成如图 12.1 中所示的形状，它是以原点为中心、R 为半徑的一部分半圓（这里 $N<R<N+1$，N 是正整数），与一条由 $-i\infty$ 到 $+i\infty$ 的曲綫，这条曲綫要避开一切 $G(\zeta)$ 的奇异点，

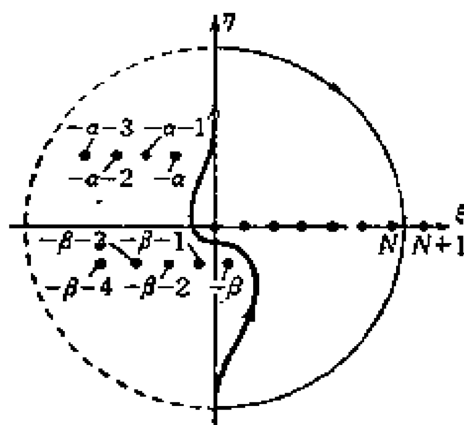


图 12.1

并使这些点都落在曲綫的左側，另外要使原点落在曲綫的右側。这时，根据留数定理，成立着

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C G(\zeta)(-z)^{\zeta}\Gamma(-\zeta)\,d\zeta=\sum_{n=0}^{N}\frac{G(n)}{n!}z^n. \qquad (12.2)$$

右边是直到极 n 处的所有留数的总和。又为了避免 $(-z)^{\zeta}$ 的多値性，可取 $|\arg(-z)|<\pi$。在現在的情形，由 (11.6)，有 $G(\zeta)=A\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)/\Gamma(\gamma+\zeta)$，$A=\Gamma(\gamma)/\{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\}$。而 $G(\zeta)$ 的极是 $-\alpha-n$，$-\beta-n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，由于 α, β 都不是負整数，所以只要适当的弯曲路綫 C 就能保証这些极全部落在 C 的左側。

此外，利用 Γ 函数的漸近展开式 (3.7)，并且令 $\zeta=Re^{i\theta}$，当 R 相当大时，就能有下面的关系

$$\frac{1}{\pi}|G(\zeta)\Gamma(-\zeta)|=\left|\frac{G(\zeta)}{\Gamma(1+\zeta)\sin\pi\zeta}\right|<BR^{\alpha+\beta-\gamma-1}e^{-\pi R|\sin\theta|} \quad (12.3)$$

(B 是适当选定的常数)[①]。

另一方面,如果令 $z=re^{i\varphi}$, 则有

$$|(-z)^{\zeta}|=|\exp[\log r+i(\varphi-\pi)]Re^{i\theta}|$$
$$=\exp[R\{\log r\cos\theta+(\pi-\varphi)\sin\theta\}]. \qquad (12.4)$$

但是当 $|\arg\theta|<\frac{\pi}{2}$, $\log r<0$(即 $|z|<1$), $|\arg(-z)|=|\varphi-\pi|<\pi$ 时,在半圆上的被积函数当 $N\to\infty$ 时,以指数函数形式缩小,因此沿着它的积分等于 0。又右边收敛于 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$,即有

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)}$$
$$\times\Gamma(-\zeta)(-z)^{\zeta}d\zeta,\ |\arg(-z)|<\pi. \qquad (12.5)$$

上面的公式限于 $|z|<1$ 及 γ 不是負整数时成立。当 α, β, γ 是任意的复数时,它是(11.6)的解析延拓。此外,当 $|z|>1$ 时,等式的右边有一定的意义,所以积分就决定了当 $|z|<1$ 时用級数(11.6)所定义的函数在 $|z|>1$ 时的解析延拓(参看下一节)[②]。

現在轉到第二种方法。由于方程 (11.1) 中 w'', w', w 的系数分别是二次式,一次式及常数,所以指示我們用 $(\zeta-z)^{\lambda}$ 作为 $k(z,\zeta)$ 比較便利。即在現在的問題中,假設了下面形式 (Euler 变换)的解作为討論的基础:

$$w(z)=\int_C(\zeta-z)^{\lambda}v(\zeta)d\zeta. \qquad (12.6)$$

把它代入到 (11.1),分别用下面的写法:

$$z=\zeta-(\zeta-z),\quad z(1-z)=\zeta(1-\zeta)+(2\zeta-1)(\zeta-z)-(\zeta-z)^2,$$

并对 $(\zeta-z)$ 加以整理后,有

$$L_z[w]=\int_C v(\zeta)[\lambda(\lambda-1)z(1-z)(\zeta-z)^{\lambda-2}$$
$$+\{-\gamma+(\alpha+\beta+1)z\}\lambda(\zeta-z)^{\lambda-1}-\alpha\beta(\zeta-z)^{\lambda}]d\zeta$$
$$=\int_C v(\zeta)[\lambda(\lambda-1)\zeta(1-\zeta)(\zeta-z)^{\lambda-2}$$

$$+\{\lambda(\lambda-1)(2\zeta-1)-\lambda\gamma+\lambda(\alpha+\beta+1)\zeta\}(\zeta-z)^{\lambda-1}$$
$$+\{-\lambda(\lambda-1)-\lambda(\alpha+\beta+1)-\alpha\beta\}(\zeta-z)^{\lambda}]d\zeta,$$

这个式子可以写成下面的形状:

$$L_z[w]=\int_C v(\zeta)[\zeta(1-\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(\zeta-z)^{\lambda}$$
$$+\{(\lambda-1)(2\zeta-1)-\gamma+(\alpha+\beta+1)\zeta\}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\zeta-z)^{\lambda}$$
$$-\{\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta\}(\zeta-z)^{\lambda}]d\zeta.$$

这样就能在[ ]中把对于 z 的运算子轉变成为对 ζ 的运算子。由于上面的式子比較复杂，如果在这里取 $\lambda=-\alpha$，或 $-\beta$，則最后項 $\lambda^2+(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta$ 就化成为 0，并且对第一項施以分部积分以后，整个的积分就变成了

$$L[w]=v(\zeta)\zeta(1-\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}(\zeta-z)^{\lambda}\Big]_C$$
$$-\int_C\Big[\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\zeta(1-\zeta)v\}-\{1-\lambda-\gamma+(\alpha+\beta$$
$$+2\lambda-1)\zeta\}v\Big]\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta}(\zeta-z)^{\lambda}d\zeta.$$

但是現在要求 $L[w]=0$，所以应这样的选擇 $v(\zeta)$，使得积分中的[ ]內等于 0，并且对积分路綫所取的第一項也是 0 才可（ $]_C$ 表示的是在积分路綫終点处的値与在积分起始处的値的差）。

現在討論一下决定 v 的式子，由于

$$\frac{d}{d\zeta}\{\zeta(1-\zeta)v\}=\zeta(1-\zeta)\frac{dv}{d\zeta}+(1-2\zeta)v,$$

所以如[ ]內为零，則直接就能得到

$$\frac{dv}{v}=\frac{-\lambda-\gamma+(\alpha+\beta+2\lambda+1)\zeta}{\zeta(1-\zeta)}d\zeta$$
$$=\left\{\frac{-\lambda-\gamma}{\zeta}+\frac{\alpha+\beta+\lambda-\gamma+1}{1-\zeta}\right\}d\zeta,$$

这式可以直接积分，而得

$$v=c\zeta^{-\lambda-\gamma}(1-\zeta)^{-\alpha-\beta-\lambda+\gamma-1}. \tag{12.7}$$

由于 λ 可以等于 $-\alpha$ 或 $-\beta$，现在明确它是 $-\beta$. 如果把关于积分路綫的条件用在 v 与 λ 上,則有

$$\zeta^{\beta-\gamma+1}(1-\zeta)^{-\alpha+\gamma}(\zeta-z)^{-\beta-1}\Big]_C=0, \tag{12.8}$$

因此得到解的积分表示

$$w(z)=A\int_C\zeta^{\beta-\gamma}(1-\zeta)^{-\alpha+\gamma-1}(\zeta-z)^{-\beta}d\zeta. \tag{12.9}$$

現在如令 $\zeta=1/s$，則能够写成

$$w(z)\infty\int_C s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds, \tag{12.10}$$

$$s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}(1-sz)^{-\beta-1}\Big]_C=0. \tag{12.11}$$

如果 $\mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\alpha>0$，則由 $s=0$ 到 $s=1$ 的积分路綫满足(12.11)(因为在两端处的函数值等于0)，現在先采用这条路綫。并且約定在这条路綫上，$\arg s$，$\arg(1-s)$ 及 $\lim\limits_{z\to0}\arg(1-sz)$ 都等于0. 把 $(1-sz)^{-\beta}$，当 $|z|<1$ 时，用二項式定理展开成冪級数,并作逐項积分,則有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\beta)(-\beta-1)\cdots(-\beta-m+1)}{m!}\\
&\quad\times(-z)^m\int_0^1 s^{m+\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}ds\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)}{m!}z^m B(m+\alpha,\gamma-\alpha)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+m)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\gamma+m)}z^m\\
&=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta;\gamma;z).
\end{aligned} \tag{12.12}$$

于是当 $\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$|z|<1$ 时，就得到了 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 的积分表示

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds, \quad (12.13)$$

$$\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0,\ |z|<1.$$

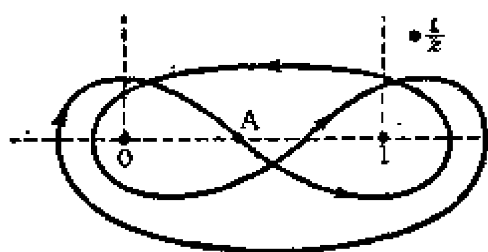


图 12.2

为了去掉上面所作的限制，即要求(12.13)的解析延拓，这时可以象对 B 函数所作的那样，取一条把 0，1 圍繞在中間的具有二重結点的积分路綫(如图 12.2)，并把变形后的积分与 (12.13) 比較，然后决定待定的系数卽可。但是为了避开支点 $s=\frac{1}{z}$ 的影响，可令 $s=\frac{1}{z}$ 落在积分路綫的外部。以后的手續基本和計算 (2.6) 时的工作一样(通过观察就能了解)，于是就导出了

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\times\oint^{(1+,0+,1-,0-)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds. \quad (12.14)$$

现在在路綫的 A 点上，与(12.13)中的条件相当，我們約定 $\arg s$，$\arg(1-s)=0$，并且 $\arg(1-sz)$ 当 $z\to 0$ 时也等于 0。

特别，如果 γ 是正整数，要使函数 $s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}$ 沿着一条閉曲綫环繞一周而仍回到它的原始的值，那么只要象图 12.3 中所表示的那样，取一条把 0，1 两点包含在內部，但使 $1/z$ 落在外

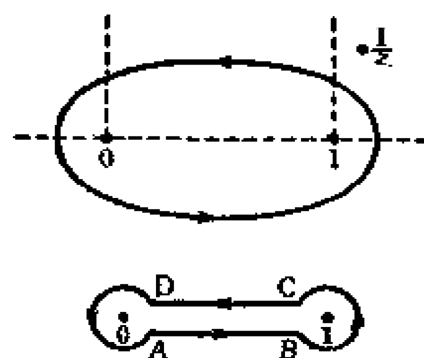


图 12.3

部的簡单閉曲綫即可。在(2.6)中如果$p+q$是正整数的話，这条积分路綫也能达到所要求的目的。这条曲綫可以經过变形成为图12.3下方的样子。設在AB上s与$1-s$的幅角为0，当$s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}$繞着1变动时（由于$(1-s)^{\gamma-\alpha}$的因子变动），它的值成为

$$|s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}|e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}=|s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}|e^{-2\pi i\alpha}.$$

再由CD出发繞着0变动时（由于s^{α}的因子变动），成为增加了幅角$2\pi\alpha$的值，即它本身还原成为$|s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}|$。于是当$\gamma$是整数时，$I$所乘的因子是$(1-e^{2\pi i\alpha})$，而积分表示簡单地成为

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\frac{(\gamma-1)!}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\oint^{(0+,1+)}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds. \tag{12.15}$$

如果$\gamma-2\alpha$是整数，我們在后面討論球函数时将指出，这时的积分路綫取成(0_+1_-)型，即8字形状的曲綫就能滿足要求。这个事实留給讀者自行証明。

上面取了繞着v的两个支点$s=0$，$s=1$（即对ζ是$\zeta=\infty$及$\zeta=1$两点）的积分路綫，但是v还有两个支点，即$s=\frac{1}{z}$与$s=\infty$（相当于$\zeta=z$及$\zeta=0$）。現在如果在$s=0,1,\infty,\frac{1}{z}$四点中任意取两点作为一組，并且象上面那样取积分路綫，那就能得到与$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$相关的各种解的表达形式。这正对应着前节中用各种級数表示的(11.1)的解。下面举几个例子說明。

如果在(12.9)中取圍繞着0与z的具有二重結点的曲綫作为积分路綫（图12.4），則有

$$w_{(0z)}=\oint^{(z+,0+,z-,0-)}\zeta^{\beta-\gamma}(1-\zeta)^{\gamma-\alpha-1}(z-\zeta)^{-\beta}d\zeta. \tag{12.16}$$

現在討論一下这个积分。假設在A点处，$\arg\frac{\zeta}{z}=0$，$\arg\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)=0$，

并且规定在同一点处，$\arg(1-\zeta)$ 当 $\zeta\neq1$ 时以及 $\zeta=0$ 时都等于 0。在 (12.16) 中令 $\zeta=zs$，则对于 s 的积分路綫成为如图 12.2 中对 z 按顺时针方向回轉的路綫，而 $w_{[0,z]}$ 变成

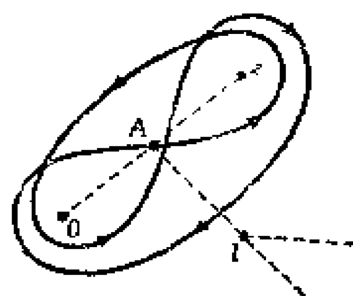


图 12.4

$$w_{[0,z]}=z^{1-\gamma}\oint^{(1+,0+,1-,0-)}s^{\beta-\gamma}(1-s)^{-\beta}(1-zs)^{\gamma-\alpha-1}ds. \quad (12.17)$$

由此可見，(12.17) 就是在积分 (12.14) 中令 $\alpha\to\beta-\gamma+1$, $\beta\to\alpha-\gamma+1$, $\gamma\to2-\gamma$ 而得的結果。如对 (12.14) 实施这种变换并乘以 $z^{1-\gamma}$，就得到

$$w_2=z^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1,\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$
$$=\frac{1}{(1-e^{-2\pi i\beta})(1-e^{2\pi i(\beta-\gamma)})}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}w_{[0,z]}. \quad (12.18)$$

根据(11.9)可知，上式的左边就表示另一个与 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 独立的解 w_2。特别是，当 $\mathrm{Re}(-\beta+1)>0$, $\mathrm{Re}(\beta-\gamma+1)>0$ 时，积分路綫收縮成为連結 0 与 z 的直綫，而积分直接成为

$$w_2=\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}\int_0^z\zeta^{\beta-\gamma}(1-\zeta)^{\gamma-\alpha-1}(z-\zeta)^{-\beta}d\zeta, \quad (12.19)$$

$$1>\mathrm{Re}\,\beta,\ \mathrm{Re}(\beta-\gamma+1)>0.$$

相反，如果把右边的 $(1-\zeta)^{\gamma-\alpha-1}$ 展开，并逐項积分，就导出了把等式的左边表达成为級数的形式。

对于 w_2，如令 $\alpha\to\alpha-\gamma+1$, $\beta\to\beta-\gamma+1$, $\gamma\to2-\gamma$，則有

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)z^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^z\zeta^{\beta-1}(1-\zeta)^{-\alpha}(z-\zeta)^{\gamma-\beta-1}d\zeta,$$

$$\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\beta>0. \quad (12.20)$$

再令 $\zeta=(z-t)/(1-t)$，則得到

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^z (z-t)^{\beta-1}t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}dt,$$
$$\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\beta>0. \qquad (12.21)$$

复变数积分的形状和上面完全相同，并且由(12.21)及(12.19)可以看到，如果实施了变换 $\alpha\to1-\alpha$, $\beta\to1-\beta$, $\gamma\to2-\gamma$，则所得到的結果就是 w_4。

§13 解析延拓的几个公式

現在討論一下在§11中所得的解，譬如在 $z=0$ 近傍以級数所表达的解 w_1, w_2，与在 $z=1$ 或 $z=\infty$ 近傍的級数解，它們之間有什么样的关系。

由于在前一节中对于这种超几何級数已經用积分表示法得到了它們在全平面上的解析延拓，所以可以理解，只要把它們适当的展开卽可。

首先从(12.5)的应用开始。如对(12.5)中的右边在 $|z|<1$ 时加以展开而得到了 w_1，那么当 $|z|>1$ 时，这个展开代表的是什么呢？对图12.1中由 $-i\infty$ 到 $i\infty$ 的积分路綫現在补充以左半平面中相当大的半圓(图中用虛綫表示的)而构成一条閉合的积分路綫，对这种积分路綫考慮积分(12.4)（这样地选擇圓的半徑 R，使得 $G(\zeta)$ 的极 $-\alpha-n$, $-\beta-n$(n 为正整数)都不落在圓周上)。这时，当 R 相当大时，对积分(12.3)所作的估值对积分(12.4)是不变的，而(12.4)中 e 的冪次 $\cos\theta$ 現在是負的。因此如果对 z 的絕对値有 $|z|>1$，卽附加以条件 $\log r>0$，那么沿着半圓所作的积分当 $R\to\infty$ 时趋于0. 結果，对于 $|z|>1$ 的情形只留下了(12.5)右边的积分，而这个积分应該等于被积函数在 $G(\zeta)$ 落在积分路綫左側圓內的极上的留数之和的 $2\pi i$ 倍。但是 $G(\zeta)$ 的

极必然是 $\Gamma(\alpha+\zeta)$ 及 $\Gamma(\beta+\zeta)$ 的极，即为 $-\alpha-n$，$-\beta-n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 等，于是再用一下关系式 $\Gamma(\alpha+\zeta)=\pi\,[\Gamma(1-\alpha-\zeta)\sin\pi(\alpha+\zeta)]$，就得到了 $G(\zeta)(-z)^{\zeta}\Gamma(-\zeta)$ 的留数是

$$A\frac{1}{\Gamma(1+n)}\frac{1}{\cos n\pi}\frac{\Gamma(\beta-\alpha-n)}{\Gamma(\gamma-\alpha-n)}(-z)^{-\alpha-n}\Gamma(\alpha+n)$$

$$=A\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!(-1)^n}\frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{\sin\pi(\beta-\alpha)}\frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)}{\Gamma(1-\beta+\alpha+n)}(-z)^{-\alpha-n}$$

$$=A\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(1-\beta+\alpha)(-z)^{-\alpha}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\alpha)n!\Gamma(1-\beta+\alpha+n)}z^{-n},$$

以及把 α 及 β 交换后所得到的値（这里 $n=0, 1, 2, \cdots$）。現在把这些留数对 n 作和，并把結果与(11.6)比較，則知道(12.5)右边当 $|z|>1$ 时的展开式，卽所期待求得的延拓公式，是

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha, 1-\gamma+\alpha; 1-\beta+\alpha; \frac{1}{z}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta, 1-\gamma+\beta; 1-\alpha+\beta; \frac{1}{z}\right),$$
$$|\arg(-z)|<\pi. \tag{13.1}$$

由于 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ 的奇异点 $z=1, \infty$ 一般是函数的支点，所以为了避免 F 的多値性，通常还以連結这两点的綫作为剖綫，而使之单値化。此外，在 $|z|>1$ 的情形，我們作了相应的規定 $|\arg(-z)|<\pi$。又在导出公式 (13.1) 时，我們假設所有 $G(\zeta)$ 的极都是单极。对于 $\alpha-\beta$ = 整数的情形，由于这时 $\Gamma(\alpha+\zeta)$ 与 $\Gamma(\beta+\zeta)$ 的极成为一致，所以需要特別地考慮，这种情形属于§11中所

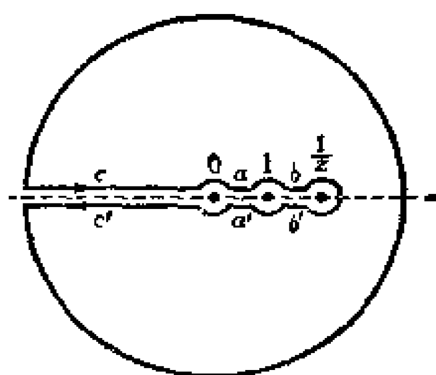


图 13.1

說的例外情形。

現在我們轉移到述說积分表示(12.13)的应用，而討論在0近傍的解与在1近傍的解之間的关系。并且限制 z 是介于0与1之間的实数，$\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$。

把(12.13)中的被积函数 $f(s, z)$ 沿着图13.1中的积分路綫进行积分。积分路綫是由环繞着 $0, 1, \frac{1}{z}$ 的以 ε 为半徑的小圓，沿着实軸連結 $\frac{1}{z}$ 与 $-\infty$ 的路綫以及以原点为中心、R 为半徑的大圓所組成的。在連結0与1的部分上，規定 $\arg s = \arg(1-s) = \arg(1-sz) = 0$。由于繞着支点轉动的关系，所以在 a, b, b', a', c', c 上 $s, 1-s, 1-sz$ 的幅角分别如下列表中所載。

		a	b	b'	a'	c'	c
$(\alpha-1)$	s	0	0	0	0	$-\pi$	π
$(\gamma-\alpha-1)$	$1-s$	0	$-\pi$	$-\pi$	-2π	-2π	0
$(-\beta)$	$1-sz$	0	0	-2π	-2π	-2π	0

由于在积分路綫的內部不存在奇异点，所以积分的总和是零。現在分别討論在大圓及圍繞着 $0, 1, \frac{1}{z}$ 各小圓上的积分，由于这时成立着条件 $\mathrm{Re}\,\beta > \mathrm{Re}\,\gamma - 1$，$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$，$\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha$，$1 > \mathrm{Re}\,\beta$，即 $2 > \mathrm{Re}(\beta+1) > \mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$，所以当 $R \to \infty$，$\varepsilon \to 0$ 时，这些部分的积分都等于0，于是得到了

$$
\begin{aligned}
&[1-e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}]\int_0^1 |f(s, z)|\,ds \\
&\quad + [e^{-\pi i(\gamma-\alpha-1)} - e^{-\pi i(\gamma-\alpha-2\beta-1)}]\int_1^{1/z} |f(z, s)|\,ds \\
&\quad + [e^{\pi i(\alpha-1)} - e^{-\pi i(\alpha+2\gamma-2\alpha-2\beta-1)}]\int_{-\infty}^{0} |f(s, z)|\,ds = 0.
\end{aligned}
$$

对此式乘以$\frac{1}{2i}e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}$，并对第2个及第3个积分分别施以变数变换 $s=\frac{1}{1-(1-z)t}$，$s=\frac{t}{t-1}$，而把积分区間变成 $t=0, 1$，則有

$$\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)\int_0^1 f(s, z)\,ds$$
$$+\sin\pi\beta(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{-\beta}[1+(1-z)t]^{\beta-\gamma}\,dt$$
$$-\sin\pi(\gamma-\beta)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\gamma}[1+(1-z)t]^{-\beta}dt=0.$$

把此式与(12.13)作比較，并且使用公式 $\pi\operatorname{cosec}\pi z=\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ 就能写成

$$\frac{\pi}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$
$$+\frac{\pi}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}$$
$$\times F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)-\frac{\pi}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta-\gamma+1)}$$
$$\times\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}F(\alpha, \beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)=0,$$

卽

$$F(\alpha, \beta;\gamma;z)$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha, \beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$$
$$\times F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z). \tag{13.2}$$

在計算过程中还使用过公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z=-\Gamma(-z)\Gamma(1+z).$$

我們在导出公式(13.2)时，曾对 α, β, γ, z 的值加了限制。現在如果 α, β, γ, z 是任意的，那么要在这个公式是有意义的时

候討論关系式成立的情形，自然要牵涉到用函数的解析延拓。可是这时由于支点的存在，所以对于幅角必須适当地予以定义。因为照顧到习惯上总取連結 z 与∞的綫作为剖綫，所以对 $1-z$ 的幅角規定 $|\arg(1-z)|<\pi$.

使用现在用的方法也能导出 (13.1)。这时只要对 α, β, γ 加以和上面相同的限制，然后設 z 是小于 -1 的負的实数，以連結 $-\infty$（或 $1/z$, 0）与 1 的射綫作为剖綫即可。比較便利的可以用图 13.2 中的积分路綫来进行計算。因此使用了 (13.1) 及 (13.2) 后，对于在 0, 1, ∞ 中任意一点近傍的解，可以用其他两点近傍的解来表达。

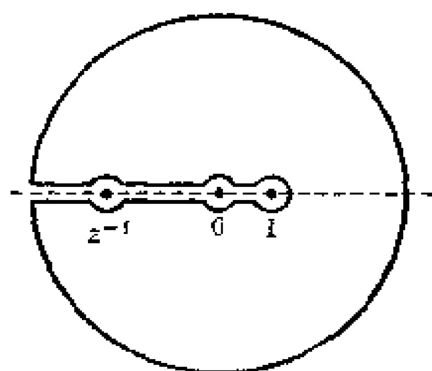


图 13.2

现在討論一下由 (12.14) 利用积分的变数变换 $s=1-t$，所导出的另外几个簡单的关系式。

首先討論积分本身，由于 $ds=-dt$，而具有二重結点的积分路綫是逆向的，所以

$$\oint_C^{(1+,0+,1-,0-)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds$$
$$=-\oint_{C'}^{(0-,1-,0+,1+)}(1-t)^{\alpha-1}t^{\gamma-\alpha-1}(1-z+zt)^{-\beta}dt$$
$$=(1-z)^{-\beta}\oint_C^{(1+,0+,1-,0-)} t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\left(1-\frac{z}{z-1}t\right)^{-\beta}dt.$$

最后的积分是由 (12.14) 經过变换 $\alpha\to\gamma-\alpha$, $(\gamma-\alpha\to\alpha)$ $\beta\to\beta$, $\gamma\to\gamma$, $s\to\frac{z}{z-1}$ 而得的結果。注意了 α 及 $\gamma-\alpha$ 的对称性后，就有

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha;\gamma;\frac{z}{z-1}\right), \quad (13.3)$$

又因为成立着 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\beta,\alpha;\gamma;z)$，所以把 α 及 β 对調后，就得到

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right). \qquad (13.4)$$

这个式子的整幂級数展开式的收斂区域是$|z|<|z-1|$，因为不等式的两边分别是到0和1的距离，所以区域是以垂直于連結0与1的綫段的直綫为界的左半平面，又因为左边的函数在以0为中心1为半徑的圓内收斂（两者自然有一部分公共的定义域），所以这个式子实际表示着解析延拓的关系。

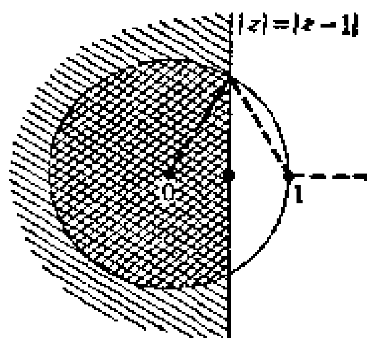


图 13.3

对于(13.3)及(13.4)，可以象在§11中那样，把F表示成$\zeta=z/(z-1)$的P函数。也可以根据解在$z=0$处的情形直接利用(8.10)写出。

这样，对于(11.1)的一般解，可以写成

$$P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & \alpha & 0 & \zeta\\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{Bmatrix}$$

$$=(1-\zeta)^{\alpha}P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & \zeta\\ 1-\gamma & \beta-\alpha & \gamma-\beta & \end{Bmatrix}$$

这样，在$z=0$处，即在$\zeta=0$正則并且函数值等于1的解，根据第一項的写法是$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$，根据第三項是$(1-\zeta)^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\zeta)$。設两者相等后就得到了一个等式，这个等式就是(13.4)。

§14 几 个 公 式

超几何級数含有一个变数z，以及三个参数α，β，γ，由前节可以見到它所满足的公式是非常多的。現在我們再补講几个重要的公式。

(1) $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ 在0与1处的函数值

由定义 (11.6) 有

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 0)=1. \tag{14.1}$$

由 (13.2), 若設 $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$, 則有

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \tag{14.2}$$

如果 $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)<0$, 那么一般这个值将成为无限大,并且它的主部据大家所熟知的結果,是

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}. \tag{14.3}$$

(2) 递推公式 把积分表示中的被积函数适当地变形就能得到种种的递推公式。自然这些公式也能直接由超几何級数(11.6)导出。現在我們以(12.14)为出发点。因为这样可以不用(11.6),因此对第二种解也同样适用,何况两种解的积分表示仅仅是积分路綫的不同,这样作就能够得到同类型的关系[7]。

在(12.14)中令 $(1-sz)^{-\beta}=(1-sz)^{-\beta-1}(1-sz)=(1-sz)^{-\beta-1}-zs(1-sz)^{-\beta-1}$ (这时, 在第一項中只把 β 增加了1, 而在第二項中考虑变换 $\alpha\to\alpha+1, \gamma-\alpha-1\to\gamma-\alpha-1$, 卽 $\gamma\to\gamma+1, \beta\to\beta+1$), 立刻可得[8]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z)=F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)$$
$$-z\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z),$$

卽

$$F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)-F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$
$$=\frac{\alpha}{\gamma}zF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z), \tag{14.4}$$

把 α 及 β 的作用变换后,則有

$$F(\alpha+1, \beta; \gamma; z)-F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$
$$=\frac{\beta}{\gamma} zF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z), \qquad (14.4')$$

又由 (14.4')－(14.4) 就得

$$F(\alpha+1, \beta; \gamma; z)-F(\alpha, \beta+1; \gamma; z)$$
$$=\frac{\beta-\alpha}{\gamma} zF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z). \qquad (14.5)$$

現在如果令

$$(1-s)^{\gamma-\alpha-1}=(1-s)^{\gamma-\alpha-2}(1-s)=(1-s)^{\gamma-\alpha-2}-s(1-s)^{\gamma-\alpha-2}$$

(即在第一項中，施以变换 $\alpha\to\alpha$, $\beta\to\beta$, $\gamma\to\gamma-1$; 在第二項中施以变换 $\alpha\to\alpha+1, \beta\to\beta; \gamma\to\gamma$),并且考虑到 $\Gamma(\gamma)=(\gamma-1)\Gamma(\gamma-1)$, 則有

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z)=\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha-1} F(\alpha, \beta; \gamma-1; z)$$
$$-\frac{\alpha}{\gamma-\alpha-1} F(\alpha+1, \beta; \gamma; z), \qquad (14.6)$$

再如果令 $\gamma\to\gamma+1$, 則有

$$F(\alpha, \beta; \gamma+1; z)=\frac{\gamma}{\gamma-\alpha} F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$
$$-\frac{\alpha}{\gamma-\alpha} F(\alpha+1, \beta; \gamma+1; z), \qquad (14.7)$$

变更 α 及 β 的位置就得

$$F(\alpha, \beta; \gamma+1; z)=\frac{\gamma}{\gamma-\beta} F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$
$$-\frac{\beta}{\gamma-\beta} F(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z). \qquad (14.7')$$

又如果把(14.4')代入到(14.6)的右边，則得

$$(\gamma-\alpha-1)F(\alpha, \beta; \gamma; z)-(\gamma-1)F(\alpha, \beta; \gamma-1; z)$$
$$=-\alpha F(\alpha, \beta; \gamma; z)-\frac{\alpha\beta}{\gamma} zF(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z),$$

即

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)-F(\alpha,\ \beta;\ \gamma-1;\ z)$$
$$=-\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma-1)}zF(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z). \quad (14.8)$$

(3) 微分公式　现在看一下 (12.14) 关于 z 微分后的情形。由于

$$\frac{d}{dz}(1-sz)^{-\beta}=\beta s(1-sz)^{-\beta-1},$$

所以微分后的結果，就是在积分 (12.14) 内令 $\alpha\to\alpha+1$, $\gamma-\alpha\to\gamma-\alpha$, 即 $\gamma\to\gamma+1$, $\beta\to\beta+1$ 后所得到的結果。也就是把全体扩大了 β 倍。于是考虑到 $\Gamma(\gamma)/\{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)\}=(\alpha/\gamma)\Gamma(\gamma+1)/\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma+1-\alpha-1)$ 之后，就可得

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\ \gamma;\ z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1;\ \gamma+1;\ z), \quad (14.9)$$

接連地作 n 次微分，就得

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha,\ \beta;\gamma;z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\ \beta+n;\gamma+n;z). \quad (14.10)$$

即超几何函数的任意阶数的导函数仍是超几何函数。把(14.9)代入到(14.4′)的右边，则有

$$F(\alpha+1,\ \beta;\gamma;z)=F(\alpha,\ \beta;\gamma;z)+\frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$$
$$=\left(1+\frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}\right)F(\alpha,\ \beta;\gamma;z), \quad (14.11)$$

即 $\overset{(\alpha)}{T}=\left(1+\frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}\right)=\frac{z^{1-\alpha}}{\alpha}\frac{d}{dz}[z^{\alpha}\cdots]$ 是使得 $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)$ 中仅仅 α 增加 1 的运算子。同样，如果交换 α 与 β 的地位，则得到了 $\overset{(\beta)}{T}$，它是仅仅使 β 增加 1 的运算子。

此外，如果把(14.8)写成下面的形式：

$$F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)=F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\frac{z}{\gamma-1}\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z), \quad (14.12)$$

那么就能看出 $\underset{(\gamma)}{T}=\left(1+\frac{z}{\gamma-1}\frac{d}{dz}\right)=\frac{z^{2-\gamma}}{\gamma-1}\frac{d}{dz}[z^{\gamma-1}\cdots]$ 是使得 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 中的 γ 减少了 1 的运算子。

为了看出使得 γ 增加的运算子，把(11.10)即

$$F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;\gamma;z)=(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

的左边微分，由(14.9)就得

$$\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}{\gamma}F(\gamma+1-\beta,\gamma+1-\alpha;\gamma+1;z)$$

$$=\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}{\gamma}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-1}F(\alpha,\beta;\gamma+1;z).$$

由于它与右边的微分相等，于是得到

$$F(\alpha,\beta;\gamma+1;z)$$

$$=\frac{\gamma}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}(1-z)^{1-(\alpha+\beta-\gamma)}\frac{d}{dz}[(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta;\gamma;z)],$$

即最后得到了

$$\overset{(\gamma)}{T}=\frac{\gamma}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}(1-z)^{1-(\alpha+\beta-\gamma)}\frac{d}{dz}[(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}\times\cdots]$$

$$=\frac{\gamma}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)}\left[\gamma-\alpha-\beta+(1-z)\frac{d}{dz}\right]. \qquad (14.13)$$

对于使 α 减少的运算子，还有

$$\underset{(\alpha)}{T}=1-\frac{\beta z}{\gamma-\alpha}+\frac{1}{\gamma-\alpha}z(1-z)\frac{d}{dz}$$

$$=\frac{1}{\gamma-\alpha}z^{1+\alpha-\gamma}(1-z)^{1-\alpha-\beta+\gamma}\frac{d}{dz}[z^{\gamma-\alpha}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}\times\cdots].$$

最后由(11.1)容易导出下面的关系：

$$\underset{(\alpha+1)}{T}\overset{(\alpha)}{T}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$

及
$$\overset{(\gamma-1)}{T}\underset{(\gamma)}{T}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\alpha,\beta;\gamma;z).$$

把超几何方程中与 F 独立的解記作 $G(\alpha,\beta;\gamma;z)$，对这个

函数能够导出与上面各公式相当的关系式。但因在$G(\alpha, \beta; \gamma; z)$的定义中，所有的参数是不同的$\alpha, \beta, \gamma$的函数，所以对于它把$\alpha, \beta, \gamma$增加了1以后的函数的关系式，具有和前面所說的不同的系数。

譬如把(11.9)中的函数$z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z)$取作$G(\alpha, \beta; \gamma; z)$时，則有与(14.9)对应的关系式

$$\frac{d}{dz}G(\alpha, \beta; \gamma; z)=(1-\gamma)G(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; z). \quad (14.14)$$

右边的系数在(14.9)中是$\frac{\alpha\beta}{\gamma}$，在(14.14)中則是$1-\gamma$.

(4) 二倍公式 我們在§1与§5中已經讲过超几何函数对于1次变换的变换公式，現在导出几个对于2次变换有用的公式。

把$w=F(\alpha, \beta; \gamma; z)$所滿足的微分方程(11.1)的独立变数$z$，用$t=4z(1-z)$变成$t$. 由于$(1-t)=(1-2z)^2$, $dt=4(1-2z)dz=4\sqrt{1-t}dz$，所以得到了

$$4t(1-t)\frac{d^2w}{dt^2}+\left[-2t+4\left\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\frac{1-\sqrt{1-t}}{2}\right\}\sqrt{1-t}\right]\frac{dw}{dt}-\alpha\beta w=0.$$

为了使它成为超几何方程，由于$\sqrt{1-t}$起了干扰的作用，所以非加入条件$2\gamma-\alpha+\beta+1=0$不可，卽当$\alpha=2a$, $\beta=2b$时，$\gamma=a+b+\frac{1}{2}$.使用了这个条件后，$w=F(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; z)$就是方程

$$t(1-t)\frac{d^2w}{dt^2}+\left\{a+b+\frac{1}{2}-(a+b+1)t\right\}\frac{dw}{dt}-abw=0 \quad (14.15)$$

的解。但是当$z=0$卽$t=0$时，函数$F(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; z)$是正則的，并且它的值等于1. 此外，如果設方程(14.15)滿足这个条件的解是$F(a, b; a+b+\frac{1}{2}; t)$，由于它們两个是相等的，所以得

到关系式

$$F\left(2a,2b;a+b+\frac{1}{2};z\right)=F\left(a,\ b;a+b+\frac{1}{2};4z(1-z)\right), \quad (14.16)$$

或是令 $\alpha=2a$, $\beta=2b$，则有

$$F\left(\alpha,\ \beta;\frac{\alpha+\beta+1}{2};z\right)=F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2};\ \frac{\alpha+\beta+1}{2};\ 4z(1-z)\right). \quad (14.16')$$

再令 $z=\frac{1}{2}(1-t)$，并且把右边利用(13.4)加以变形，则有

$$\begin{aligned}&F\left(\alpha,\ \beta;\frac{\alpha+\beta+1}{2};\ \frac{1}{2}(1-t)\right)\\&=F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2};\ \frac{\alpha+\beta+1}{2};\ 1-t^2\right)\\&=t^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\alpha+1}{2};\ \frac{\alpha+\beta+1}{2};1-\frac{1}{t^2}\right).\end{aligned} \quad (14.17)$$

又如果不用 (13.4) 而使用 (13.2)，则有

$$\begin{aligned}&F\left(\alpha,\beta;\frac{\alpha+\beta+1}{2};\ \frac{1}{2}(1-t)\right)\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2};\ \frac{1}{2};t^2\right)\\&\quad+\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}tF\left(\frac{\beta+1}{2},\ \frac{\alpha+1}{2};\ \frac{3}{2};\ t^2\right)\\&=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}F\left(\frac{\alpha}{2},\ \frac{\beta}{2};\ \frac{1}{2};t^2\right)\end{aligned}$$

$$-\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}tF\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2};\frac{3}{2};t^2\right). \quad (14.18)$$

§15 Jacobi 多項式

1. Jacobi 多項式 超几何函数具有三个参数，但是在具体的实际問題中所出現的函数，在一般情形中常常对这三个参数規定某一些特殊的値。作为这种例子之一，我們考慮 Jacobi 多項式。

首先，我們在 §11 中已經說过，如果 α 或 β 是負的整数，那么超几何函数就化成为多項式。

由于 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 对 α 及 β 具有对称性，所以可以不失一般性，令 $\alpha\to-n$, $\beta\to\alpha+n$, $n=0, 1, 2, \cdots$, 这样就得到了下面的多項式

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_n(\alpha, \gamma; z) &= F(-n, \alpha+n; \gamma; z) = F(\alpha+n, -n; \gamma; z)\\ &=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\\ &\quad\times\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}z^k.\end{aligned} \quad (15.1)$$

这个多項式叫做 Jacobi n 次多項式。这里 $\alpha+n$ 及 γ 都 $\neq 0, -1, \cdots, -n+1$.

2. 积分表示与微分表示 下面求 (15.1) 的积分表示。最便利的方法是直接把(12.21)考慮成为复变数积分，即

$$\begin{aligned}\mathscr{J}_n(\alpha, \gamma; z) &= F(\alpha+n, -n; \gamma; z)\\ &= A_1 z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha}\oint_C (t-z)^{-n-1}t^{\gamma+n-1}(1-t)^{\alpha-\gamma+n}dt.\end{aligned}$$

这里的积分路綫是象图 12.4 中那种繞着 0 与 1 而具有二重結点的曲綫。現在由于 $t=z$ 不再是支点，所以需要把路綫的形狀略为

改变一下。系数 A_1 以后再来决定。象以前一样，把积分路綫变成圍繞着 0 与 z 的小圓以及連結两点間的直綫两部分。繞着支点轉动时，被积函数的幅角发生 $0\to 2\pi\gamma$ 及 $2\pi\gamma\to 0$ 的两种变化。因此沿着圍繞支点 0 所作的积分，与在直綫上往返的积分都相互抵消。但是另外圍繞着极的积分，一种使幅角发生由 $2\pi\gamma$ 到 0 的变化，而另一种的旋轉方向相反，故此两种不能抵消，于是結果归結为沿正向繞 z 的曲綫的积分乘以一个定数。如果把这个定数作为 A_1，而可以把积分路綫作为与 z 相当接近的小圓。因为在这个圓内 $G(t)=t^{\gamma+n-1}(1-t)^{\alpha-\gamma+n}$ 无疑是正則的，对于正則函数的导函数，根据 Goursat 定理有 $G^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C^{(0+)}\dfrac{G(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$，于是得到了积分的值等于 $\dfrac{2\pi i}{n!}G^{(n)}(z)$，因此对于 A_1 的計算法，可以用下面的公式求得

$$\mathscr{J}_n(\alpha,\gamma;z)=A_1z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha}\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-1+n}(1-z)^{\alpha-\gamma+n}]. \tag{15.2}$$

利用条件 $z=0$ 时 $\mathscr{J}_n(\alpha,\gamma;0)=1$，就得到了 A_1：

$$A_1=\lim_{z\to 0}z^{\gamma-1}/\frac{d^n}{dz^n}z^{\gamma-1+n}=[\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)]^{-1}=1/(\gamma)_n. \tag{15.2'}$$

3. 正交关系式 由 (11.1) 得到 Jacobi 多項式 $\mathscr{J}_n(\alpha,\gamma;z)$ 所滿足的微分方程

$$z(1-z)w''+[\gamma-(1+\alpha)z]w'+n(n+\alpha)w=0, \tag{15.3}$$

它也可写成

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\gamma}(1-z)^{\alpha-\gamma+1}\frac{dw}{dz}\right]+n(n+\alpha)z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}w=0. \tag{15.3'}$$

分別在 (15.3′) 中把 w 写成 $\mathscr{J}_m$ 及 $\mathscr{J}_n$，就有

$$[z^{\gamma}(1-z)^{\alpha-\gamma+1}\mathscr{J}_m']'+m(m+\alpha)z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\mathscr{J}_m=0,$$

$$[z^{\gamma}(1-z)^{\alpha-\gamma+1}\mathscr{J}_n']'+n(n+\alpha)z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\mathscr{J}_n=0.$$

分别对方程乘以$\mathscr{J}_n$及$\mathscr{J}_m$,然后作差,并且考虑到$f[hg']'-g[hf']'=[fhg'-ghf']'$之后,由$z=0$到$z=x$作积分,于是得积分公式

$$[m(m+\alpha)-n(n+\alpha)]\int_0^x x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\mathscr{J}_m(x)\mathscr{J}_n(x)dx$$
$$=\Big[x^{\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}(\mathscr{J}_m\mathscr{J}_n'-\mathscr{J}_n\mathscr{J}_m')\Big]_0^x$$
$$=x^{\gamma}(1-x)^{\alpha-\gamma+1}(\mathscr{J}_m\mathscr{J}_n'-\mathscr{J}_n\mathscr{J}_m'),\ \mathrm{Re}\,\gamma>0. \tag{15.4}$$

这样,当 $\mathrm{Re}\,\gamma>0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha-\gamma+1)>0$, 并且 $m\neq n$ 时,在区間$[0,1]$中,$\mathscr{J}_m(\alpha,\gamma;x)$ 与 $\mathscr{J}_n(\alpha,\gamma;x)$ 以权 $x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$ 正交,即

$$[\mathscr{J}_m,\mathscr{J}_n]\equiv\int_0^1\mathscr{J}_m(\alpha,\gamma;x)\mathscr{J}_n(\alpha,\gamma;x)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx$$
$$=0,\quad m\neq n,\ \mathrm{Re}\gamma,\ \mathrm{Re}(\alpha-\gamma+1)>0. \tag{15.5}$$

要求$m=n$的情形,設$G(x)\equiv x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}$,并且考虑它的$n$次导函数

$$G^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\},$$

如以$x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$为权函数,則对$x^m$与 $\mathscr{J}_n(\alpha,\gamma;x)$ 的直积有公式

$$[x^m,\mathscr{J}_n]\equiv\int_0^1 x^m\mathscr{J}_n(x)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx$$
$$=\frac{1}{(\gamma)_n}\int_0^1 x^mG^{(n)}(x)dx. \tag{15.6}$$

現在对积分作分部积分,由于 $G^{(k)}(x)$, $(k<n)$, 当$x=0$或1时函数值都是零,所以結果有

$$[x^m,\mathscr{J}_n]_{m<n}\propto\int_0^1 G\frac{dx^m}{dx^n}dx=0. \tag{15.7}$$

即对于权函数 $x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$, $\mathscr{J}_n$ 与一切次数低于n的多项式都

是正交的。(15.5)是这里的特殊情形。

但是由 (15.1) 知道 $\mathscr{J}_n$ 中 x^n 的系数是

$$c_n=(-1)^n\frac{(\alpha+n)_n}{(\gamma)_n} \tag{15.8}$$

这样，如对 (15.6) 施以分部积分，并根据 (15.7)，在假設成立 $\mathrm{Re}\gamma$, $\mathrm{Re}(\alpha-\gamma+1)>0$ 的条件下，就有下面的公式：

$$\begin{aligned}[\mathscr{J}_n, \mathscr{J}_n]&=\int_0^1[c_n x^n+(n-1)\text{次式}]\mathscr{J}_n x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx\\&=\frac{1}{(\gamma)_n}(-1)^n\frac{(\alpha+n)_n}{(\gamma)_n}\int_0^1 G^{(n)}x^n dx\\&=\frac{(\alpha+n)_n}{(\gamma)_n^2}(-1)^{n+n}\int_0^1 G\frac{d^n}{dx^n}x^n dx\\&=\frac{(\alpha+n)_n n!}{(\gamma)_n^2}\int_0^1 x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}dx\\&=\frac{\Gamma(\alpha+2n)\Gamma^2(\gamma)n!}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma^2(\gamma+n)}\cdot\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+2n+1)}.\end{aligned}$$

这里用 B 函数的公式(1.12)及(2.14)整頓一下，最后就能得到所期待的正規化积分公式

$$\begin{aligned}[\mathscr{J}_n, \mathscr{J}_n]&=\int_0^1\mathscr{J}_n^2(\alpha,\gamma;x)x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx\\&=\frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}\frac{n!}{\alpha+2n},\\&\mathrm{Re}\gamma,\ \mathrm{Re}(\alpha-\gamma+1)>0.\end{aligned} \tag{15.9}$$

4. 特殊情形，超球多項式 对于(11.1)的奇异点 $z=0,1,\infty$，常常可以利用变换

$$t=1-2z,\quad \text{即}\quad z=\frac{1-t}{2} \tag{15.10}$$

把它們的位置变成 1, -1, ∞，这样地来研究問題，有时比較便利，这时多項式的解通常取作

$$P_n^{(\mu,\nu)}(t)=\frac{(\mu+1)_n}{n!}F\left(-n,\,n+\mu+\nu+1;\,\mu+1;\,\frac{1-t}{2}\right) \tag{15.11}$$

$$=\frac{(\mu+1)_n}{n!}\mathscr{J}_n\left(\mu+\nu+1,\mu+1;\,\frac{1-t}{2}\right), \tag{15.12}$$

它所满足的微分方程根据(15.3)是

$$\frac{d}{dt}\left\{(1-t)^{\mu+1}(1+t)^{\nu+1}\frac{dw}{dt}\right\}$$

$$+n(n+\mu+\nu+1)(1-t)^{\mu}(1+t)^{\nu}w=0. \tag{15.13}$$

现在公式(15.2)成为

$$P_n^{(\mu,\nu)}(t)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-t)^{-\mu}(1+t)^{-\nu}$$

$$\times\frac{d^n}{dt^n}\{(1-t)^{n+\mu}(1+t)^{n+\nu}\}, \tag{15.14}$$

正交关系式(15.9)成为

$$[P_m^{(\mu,\nu)}(x),\,P_n^{(\mu,\nu)}(x)]$$

$$=\int_{-1}^{1}P_m^{(\mu,\nu)}(x)P_n^{(\mu,\nu)}(x)(1-x)^{\mu}(1+x)^{\nu}dx,\qquad \mu,\,\nu>-1,$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2^{\mu+\nu+1}}{2n+\mu+\nu+1}\,\dfrac{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(n+\nu+1)}{n!\,\Gamma(n+\mu+\nu+1)} & (m=n),\\[2ex] 0 & (m\neq n).\end{cases} \tag{15.15}$$

显然 $P_n^{(\mu,\nu)}(x)$ 与次数在 $n-1$ 以下的多项式都成立正交关系。这种形式的写法对 μ 及 ν 具有对称性，所以最适宜用于討論 $\mu=\nu$ 的情形，这种情形的多项式叫做超球多项式。作为它的特殊情形，还包括下列一些函数。

Gegenbauer 多項式：

$$C_n^{\nu+1/2}(t)=\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n+2\nu+1)}{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(n+\nu+1)}P_n^{(\nu,\nu)}(t), \tag{15.16}$$

Legendre 多項式：

$$P_n(t)=P_n^{(0,0)}(t)=C_n^{1/2}(t)=\mathscr{J}_n\left(1,\,1,\,\frac{1-t}{2}\right)$$

$$=F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-t}{2}\right), \tag{15.17}$$

Legendre 陪函数：

$$P_n^m(t)=(1-t^2)^{m/2}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)=\frac{(n+m)!}{2^m n!}(1-t^2)^{m/2}P_{n-m}^{(m,m)}(t)$$

$$=\frac{(2m)!}{2^m m!}(1-t^2)^{m/2}C_{n-m}^{m+1/2}(t)$$

$$=(1-t^2)^{m/2}\frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}$$

$$\times F\left(m-n, m+n+1, m+1; \frac{1-t}{2}\right), \tag{15.18}$$

Tschebyscheff 多项式：

$$T_n(t)=\mathscr{G}_n\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1-t}{2}\right)=\frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n}P_n^{(-1/2,-1/2)}(t)$$

$$=F\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-t}{2}\right). \tag{15.19}$$

根据(15.15)，以上四种多项式在区間$(-1, +1)$中分别以$(1-x^2)^\nu$, 1, 1, $(1-x^2)^{-1/2}$作为权函数，当$m\neq n$时成立正交关系，如果$m=n$，则对于(15.15)中的值，容易驗明分别成为下列的情形

$$\frac{2\pi\Gamma(2\nu+n+1)}{2^{2\nu+1}\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)n!\left[\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}, \quad \frac{2}{2n+1},$$

$$\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \frac{1}{2}\pi \text{ (如 } m=0\text{, 则等于 } \pi\text{)}. \tag{15.20}$$

此外，如果λ不是整数，则与(15.13)相当的$P_\lambda^{(\nu,\nu)}$所满足的微分方程是

$$\frac{d}{dt}\left\{(1-t^2)^{\nu+1}\frac{dw}{dt}\right\}+\lambda(\lambda+2\nu+1)(1-t^2)^\nu w=0. \tag{15.21}$$

它的一般解(参照 (11.1)) 是

$$P\begin{Bmatrix} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\lambda & t \\ -\nu & -\nu & \lambda+2\nu+1 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{1-t}{2} \\ -\nu & -\nu & \lambda+2\nu+1 & \end{Bmatrix}. \tag{15.22}$$

这些解总称为超球函数。

§16 初等函数表示的超几何函数

超几何級数在有限次截断时可以表示成为 Jacobi 多項式，此外，还有其他能表示成为初等函数的情形。先举几个容易确认的情形，有下面的几个公式。

1.

$$F(\alpha,\beta;\beta;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}x^n=(1-x)^{-\alpha}, \tag{16.1}$$

$$F(1,1;2;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(1+n)!}x^n=\frac{-1}{x}\log(1-x), \tag{16.2}$$

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)=1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^4}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^6}{7}+\cdots$$

$$=\frac{1}{x}\sin^{-1}x, \tag{16.3}$$

$$F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right)=1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\cdots=\frac{1}{x}\tan^{-1}x. \tag{16.4}$$

此外，还有虽不能用初等函数，但是可以用第一种或第二种完全椭圆积分，或者与它們类似的函数写出的例子，如[①]

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;k^2\right), \tag{16.5}$$

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right). \quad (16.6)$$

2. Tschebyscheff 函数 在以 $w=\cos\nu\theta$ 或 $\sin\nu\theta$ 为一般解的微分方程

$$\frac{d^2w}{d\theta^2}+\nu^2\theta=0 \quad (16.7)$$

中，令 $t=\cos\theta$ 为新的独立变数而变换方程的形状$\left(由于\ \frac{d}{d\theta}=-(1-t^2)^{1/2}\frac{d}{dt}\right)$，则得

$$(1-t^2)\frac{d^2w}{dt^2}-t\frac{dw}{dt}+\nu^2w=0. \quad (16.8)$$

它的基本解是 $w=\cos(\nu\cos^{-1}t)$，$\sin(\nu\cos^{-1}t)$，但是另一方面，方程(16.8)是在方程(15.21)中，令 $\nu\to-\frac{1}{2}$，$\lambda\to\nu$ 而得到的，所以可以有写法

$$w=\frac{\cos(\nu\cos^{-1}t)}{\sin(\nu\cos^{-1}t)}=P\left\{\begin{matrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu & \frac{1-t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\nu & \end{matrix}\right\}. \quad (16.9)$$

把后面的写法与(11.2)，(11.10)比较，并且利用二倍公式(14.17)，就得到方程的两个基本解

$$T_\nu(t)=F\left(\nu,-\nu;\frac{1}{2};\frac{1-t}{2}\right)=F\left(\frac{\nu}{2},-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};1-t^2\right), \quad (16.10)$$

$$U_\nu(t)=\nu(1-t^2)^{\frac{1}{2}}F\left(1+\nu;1-\nu;\frac{3}{2};\frac{1-t}{2}\right)$$

$$=\nu(1-t^2)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{1-\nu}{2};\frac{3}{2};1-t^2\right). \quad (16.11)$$

通过比较这种解与前面的 w 在 $t=1$ 处的值以及它們的导函数在此处的值，就能得到

$$T_\nu(t)=\cos(\nu\cos^{-1}t)$$

$$=\frac{1}{2}[(t+i\sqrt{1-t^2})^\nu+(t-i\sqrt{1-t^2})^\nu], \qquad (16.12)$$

$$U_\nu(t)=\sin(\nu\cos^{-1}t)$$

$$=\frac{1}{2i}[(t+i\sqrt{1-t^2})^\nu-(t-i\sqrt{1-t^2})^\nu]. \qquad (16.13)$$

T_ν 与 U_ν 分别叫做第一种与第二种 Tschebyscheff 函数。

現在如果令 $t=\cos\theta$ 或 $s=\sin\theta$, 則有

$$F\left(\frac{\nu}{2},-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};\sin^2\theta\right)=\cos\nu\theta=\cos(\nu\sin^{-1}s), \qquad (16.14)$$

$$F\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{1-\nu}{2};\frac{3}{2};\sin^2\theta\right)=\frac{\sin\nu\theta}{\nu\sin\theta}=\frac{1}{\nu s}\sin(\nu\sin^{-1}s). \qquad (16.15)$$

当 ν 是整数时, Tschebyscheff 函数就都能表示成多項式, 而成为 Jacobi 多項式或 Gegenbauer 多項式的特殊情形。由 (15.1) 有写法

$$T_n(x)=\mathscr{J}_n\left(0,\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right),$$

$$U_n(x)/\sqrt{1-x^2}=n\mathscr{J}_n\left(2,\frac{3}{2},\frac{1-x}{2}\right) \qquad (16.16)$$

(参照 (15.12), (15.19))。

3. 此外, 还有一些情形由于适当地运用了微分公式, 特别是使 α, β, γ 增减的运算子, 以及递推公式, 一次变换, 二倍公式及解析延拓的各种公式后, 能归結成 1., 2. 或 Jacobi 多項式的情形。

例 (1) 在二倍公式 (14.16′) 中令 $\alpha=\nu$, $\beta=\nu+1$, 则由 (16.1) 有

$$F\left(\frac{\nu}{2},\frac{\nu+1}{2};\nu+1;4z(1-z)\right)=F(\nu,\nu+1;\nu+1;z)=(1-z)^{-\nu}. \qquad (16.17)$$

又令 $4z(1-z)=t$, 而把 z 写成 $z=(1-\sqrt{1-t})/2$, 則导出了

$$F\left(\frac{\nu}{2},\frac{\nu+1}{2};\nu+1;t\right)=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-t}}\right)^\nu=2^\nu\left(\frac{1-\sqrt{1-t}}{t}\right)^\nu. \qquad (16.18)$$

(2) 把 (16.14) 对 θ 微分，由 (14.9) 有

$$F\left(\frac{2+\nu}{2},\frac{2-\nu}{2};\frac{3}{2};\sin^2\theta\right)=\frac{\sin\nu\theta}{\nu s\cos\theta}=\frac{\sin(\nu\sin^{-1}s)}{\nu\sqrt{1-s^2}}. \tag{16.19}$$

对 (16.15) 运用使 γ 减少 1 的运算子，这个运算子据 (14.12) 是

$$\underset{(\gamma)}{T}=1+2\sin^2\theta\frac{d}{d(\sin^2\theta)}=1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta},$$

于是有

$$F\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{1-\nu}{2};\frac{1}{2};\sin^2\theta\right)=\frac{\cos\nu\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos(\nu\sin^{-1}s)}{\sqrt{1-s^2}}. \tag{16.20}$$

(3) 在 (13.4) 中令 $\beta=\gamma+m$，参照 (15.1) 关于 Jacobi 多项式的定义，则有

$$\begin{aligned}F(\alpha,\gamma+m;\gamma;z)&=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,-m;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)\\&=(1-z)^{-\alpha}\mathscr{J}_m\left(\alpha-m,\gamma;\frac{z}{z-1}\right).\end{aligned} \tag{16.21}$$

第4章 球 函 数

用球坐标(r, θ, φ)所写的 Laplace 方程具有下列的形状[1]

$$\Delta\Psi \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\Lambda}{r^2}\Psi = 0, \tag{1}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{2}$$

如果 Ψ 是在某一区域 D 中满足(1)的正則函数，則称它为調和函数。令 $\Psi = r^\nu Y_\nu(\theta,\varphi)$，則 $Y_\nu(\theta,\varphi)$ 满足方程

$$\{\Lambda + \nu(\nu+1)\}Y_\nu(\theta, \varphi) = 0. \tag{3}$$

这个方程已經在§5中作为 Helmholtz 方程或 Schrödinger 方程的球坐标写法在变数分离后所导出的方程而出現过。$Y_\nu(\theta, \varphi)$ 如果在球面的 $0 \leqslant \theta < \pi$，$0 < \varphi < 2\pi$ 上正則，并且对 θ 及 φ 具有周期性，則称它为 ν 次球面調和函数。在以后将証明这个数 ν 非是整数不可。此外，如果令 $\cos\theta = z$，如(5.12′)所指示的，以 $Y_\nu(\theta,\varphi) = w(z)\cos\mu\varphi$，$w(z)\sin\mu\varphi$，則这里的 $w(z)$ 满足

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dw_{\nu\mu}}{dz}\right\} + \left\{\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right\}w_{\nu\mu} = 0. \tag{4}$$

根据周期性条件，对于球面調和函数，μ 必然是整数 m，所以 n 次球面調和函数 Y_n 可以表示成 $w_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi$ 与 $w_{nm}(\cos\theta)\sin m\varphi$ 的綫性組合。

§17 Legendre 函数

1. Legendre 函数 在(4)内令 $\mu = 0$，則得 Legendre 方程

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \nu(\nu+1)w = 0. \tag{17.1}$$

要得到它的一般解，只要在 (15.22) 中令 $\nu=0, \lambda=\nu$ 即可，即有

$$P\begin{Bmatrix} -1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\nu & z \\ 0 & 0 & \nu+1 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\nu & \frac{1-z}{2} \\ 0 & 0 & \nu+1 & \end{Bmatrix}. \quad (17.2)$$

在它圍繞着正則奇异点 $z=1$ 的解中，有一个是由常数項开始成为 $z-1$ 的整冪級数，另一个解，由于属于 (7.10) 的特殊情形，所以当 $z\to1$ 时，对数函数式趋于 ∞。

令上一个解中的常数項为 1，这种解叫做(第一种) Legendre 函数，記作 $P_\nu(z)$。它是超几何函数的特殊情形，所以由 (11.2) 有

$$\begin{aligned} P_\nu(z)&=F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right) \\ &=1-\frac{\nu(\nu+1)}{1!1!}\frac{1-z}{2}+\frac{(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)}{2!2!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \\ &\quad-\frac{(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3!3!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^3+\cdots, \end{aligned} \quad (17.3)$$

由这里可以导出下面的結果。

(1) $P_{-\nu-1}(z)=P_\nu(z)$.

(2) 当 $\nu=$ 正整数 n 或是等于 0 ($n=0$)时，$P_\nu(z)$ 成为 z 的 n 次多項式。这时叫 $P_\nu(z)$ 为 Legendre 多項式，它是 Jacobi 多項式(或超球多項式)的特殊情形。

(3) $P_\nu(1)=1$，而 $P_\nu(-1)$ 当 ν 不是整数时成为 ∞ (参照 (13.2))，此外由 (13.1)，当 $\nu>0$，并且 $z\to\infty$ 时，$P_\nu(z)\to\{\Gamma(2\nu+1)/[2^\nu\Gamma(\nu+1)^2]\}z^\nu$.

2. $P_\nu(z)$ 的积分表示 $P_\nu(z)$ 的积分表示直接能由超几何函数的积分表示 (12.18) 导出，但是用 (12.9) 式来求比較更簡单

一些。由于它是用 (17.3) 定义的,所以在 (12.9) 中令 $\alpha\to-\nu$, $\beta\to\nu+1$, $\gamma\to1$, $z\to\frac{1-z}{2}$, 及变数变换 $\zeta\to\frac{1-t}{2}$ 后,就可以把 $w(z)$ 写成

$$w(z)=A'\int_{C_1}\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}dt. \tag{17.4}$$

至于积分曲綫 C_1,我們要求在它的两端处

$$\frac{(1-t^2)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}} \tag{17.4'}$$

的値相等,这样,(17.4)就滿足方程(17.1).現在在 t 平面上由 -1 到 $-\infty$ 引入一条割綫,如果把 C_1 取成正向环繞 1 与 z 一周的曲綫,并且这条曲綫不与割綫相交的話 (見图 17.1),则函数的幅角变动了 $2\pi i[(\nu+1)-(\nu+2)]$,所以函数值回到原来的值。另外如果規定在 A 处,$\arg(t-1)$ 与 $\arg(t+1)$ 等于 0,并且 $|\arg(t-z)|<\pi$,则(17.4)在 $z=1$ 处是正則的,并且有值为

$$A'\oint_{C_1}\frac{(t+1)^\nu}{(t-1)}dt=2\pi i\cdot2^\nu A'.$$

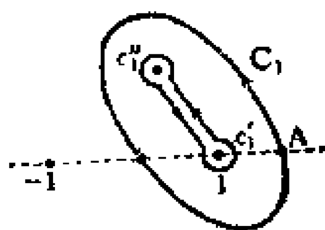


图 17.1 t 平面

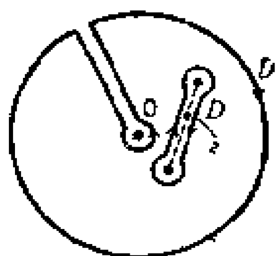


图 17.2 s 平面

令这个值为 1,则有 $A'=2^{-\nu}/(2\pi i)$,这样也就决定了 $P_\nu(z)$ 的积分表示,即得

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}^{(1+,z+)}\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+1}}dt. \tag{17.5}$$

这个积分叫做 Schläfli 积分。

在(17.5)中令 $\dfrac{t^2-1}{t-z}=2s$，即 $t=s+\sqrt{s^2-2sz+1}$，

$$dt=\left\{1+\frac{s-z}{\sqrt{s^2-2sz+1}}\right\}ds=\frac{t-z}{t-s}\,ds. \tag{17.6}$$

現在看一下圍繞着 $t=1$ 及 $t=z$ 的小圓 c_1' 及 c_1''，以及連結这两点的綫段所成的图形，对于上面的变换，这个图形映于 s 平面上的图形 D'，由于 c_1' 映成了繞着 $s=0$ 反时針方向旋轉的小圓，而 c_1'' 映成了依相反方向繞 ∞ 旋轉的大圓，所以 D' 是由这两个圓以及沿着剖綫連結这两点的直綫所組成的路綫。于是，这时积分(17.5)就成为[2]

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_D\frac{s^\nu ds}{\sqrt{s^2-2sz+1}}. \tag{17.7}$$

这种写法的根据是积分路綫 D' 可以收縮成为图 17.2 中的閉曲綫 D 而不影响积分的值，D 是圍繞着 $\sqrt{1-2sz+s^2}$ 的支奇异点 $s=z\pm\sqrt{z^2-1}$ 以及連結它們的剖綫的閉曲綫。又考慮到关系式 $P_\nu(z)=P_{-\nu-1}(z)$ 后，还有另外的写法

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_D\frac{ds}{s^{\nu+1}\sqrt{s^2-2sz+1}}. \tag{17.8}$$

3. Legendre 多項式 如 ν 是正整数 n，对在 C 内正則的函数 $f(z)=(z^2-1)^n$ 的导函数使用函数論中的 Goursat 定理 $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$，以及(17.5)(即令 $f(t)=(t^2-1)^n$)，就可得 Rodrigues 公式

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n. \tag{17.9}$$

这个公式也能根据(15.17)，在(15.14)中令 $\mu=\nu=0$，$t=z$ 而得到(也可以在(17.3)中令 $\nu=n$ 来求)，由这里就知道 $P_n(z)$ 能表成下面的 n 次多項式

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}z^{2n-2s}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{s\leqslant\frac{n}{2}}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!}z^{n-2s}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}z^nF\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{1}{2}-n;\frac{1}{z^2}\right). \qquad (17.10)$$

譬如当 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时，有

$$P_0(z)=1,\ P_1(z)=z,\ P_2(z)=\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2},\ P_3(z)=\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z,$$

$$P_4(z)=\frac{35}{8}z^4-\frac{15}{4}z^2+\frac{3}{8},\quad P_5(z)=\frac{63}{8}z^5-\frac{35}{4}z^3+\frac{15}{8}z,\cdots.$$

現在討論一下(17.8)的积分到底是什么？为了进行这样的計算，不用收縮后的閉曲綫 D，仍取原来連結小圓与大圓的路綫 D' 更較合适些。因为現在 ν 是正整数，所以如以大圓的半徑为 R，那么沿着大圓所作的积分値近似于 $O(R^{-n-1})$. 又因为 $s=0$ 是极点而不是支点，所以在連結 0 与 s 的直綫上，所作的往复积分的値是 0. 故此結果只留下了圍着 $s=0$ 的积分，这个积分的値，对于在圓内正則的函数 $G(s)=1/\sqrt{s^2-2sz+1}$，根据 Goursat 定理，成为

$$P_n(z)=\frac{1}{n!}G^{(n)}(0)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{\sqrt{s^2-2sz+1}}\right]_{s=0}. \quad (17.11)$$

于是得到这样的事实，即 $G(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2sz+s^2}}$ 在 $s=0$ 邻近具有下面的 Taylor 展开式

$$G(s)=\frac{1}{\sqrt{1-2zs+s^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G^{(n)}(0)}{n!}s^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)s^n, \quad (17.12)$$

并且由于 $|s|<|z\pm\sqrt{z^2-1}|$，即以到 D 內的支点的距离作为級数的收斂半徑。相反，当 $|s|>|z\pm\sqrt{z^2-1}|$ 时，根据(17.7)的 Laurent 展开式，或是直接根据(17.12)的展开，就能导出

$$G(z)=\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{2z}{s}+\dfrac{1}{s^2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(z)}{s^{n+1}}. \qquad (17.13)$$

$G(z)$ 叫做 $P_n(z)$ 的母函数。又根据现在导出的公式，所以 $P_n(z)$ 又叫做(第一种) Legendre 系数。

現在例举几个 $P_n(z)$ 的簡单性质。

（1） 首先由(17.10)有

$$P_n(-z)=(-1)^n P_n(z),$$

即偶数次的 $P_n(z)$ 是偶函数，奇数次的 $P_n(z)$ 是奇函数。

（2） $P_{2m+1}(0)=0$,

$$P_{2m}(0)=\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}=(-1)^m\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2m}.$$

（3） $P_n(z)$ 在 -1 与 $+1$ 之間具有 n 个相异的零点。这个事实只要研究一下 $(z^2-1)^n$ 的逐次导函数的零点，自然可以明了[3]。

（4） 正交关系。首先根据 Jacobi 多項式一节中所得到的結果，就有

$\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}P_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 在区間 $-1<x<+1$ 中組成正規化正交系，又 $P_n(x)$ 与 $x^k(k=0, 1, \cdots, n-1)$ 是正交的。

（5） 由(15.4)有[4]

$$\int_x^1 P_n(x)P_m(x)dx=\frac{(1-x^2)\{P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\}}{(n-m)(n+m+1)}.$$

（6）在(17.12)中如令 $z=1$，則有

$$\frac{1}{1-s}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)s^n,$$

即 $P_n(1)=1$，及 $P_n(-1)=(-1)^n$ (这一点也能由奇偶性証明)。

4. 第二种 Legendre 函数　对于(17.1)的第二个解，还是用(17.4)的积分表示来定义比較便利。对于第一种解，积分路綫是包

圍1与 z 的曲綫，对于第二种解，积分路綫可以用圍着 -1 与 $+1$ 的曲綫。如 ν 不是正整数，那么 $t=\pm1$ 是函数 $(1-t^2)^{\nu+1}/(t-z)^{\nu+2}$ 的支点，于是要注意幅角的变化。一般相当于超几何函数中(12.14)的情形，那里为了要使幅角繞着 $t=\pm1$ 时都发生 $\nu+1$ 的变化，取象图中的∞字形路綫即可(图17.3)。現在当正向繞着 $t=-1$ 变动时，幅角增加了 $2\pi\nu$，而逆向繞着 $t=+1$ 变动时，幅角减少了 $2\pi\nu$，故此相互抵消。适当选擇了常数 A' 后，积分

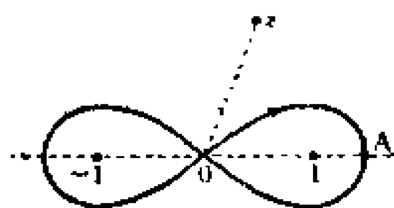


图 17.3

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{4i\sin\nu\pi}\oint_{C_2}^{(1+,-1+)}\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}dt \qquad (17.14)$$

就叫第二种 Legendre 函数。

通常我們規定 $t-1$ 及 $t+1$ 的幅角在 A 点处是0，又 $z-t$ 的幅角，当 t 通过原点时，就等于 z 的幅角。至于函数 $Q_\nu(z)$，根据其积分表示可知它必是 z 的多值函数，幷以 ±1，∞ 为支点（ν 非整数时），可以結連支点 $+1$ 与 ∞ 的直綫作为割綫来使它单值化，这时必有 $|\arg(z-1)|<\pi$.

当 $\mathrm{Re}(\nu+1)>0$ 时，由于(17.4′)中的函数

$$(1-t^2)^{\nu+1}/(t-z)^{\nu+2}$$

当 $t=-1$ 或 $+1$ 时是0，因此(17.14)中的积分可能用連結 -1 与 1 的实积分来表达。象前面所說的把积分路綫变形使之成为图17.4中的形状，現在由 A 点来看，在实軸上的点 F 与 B 处，$t-1$ 的幅角分别是 πi 及 $-\pi i$，由于 $t+1$ 的幅角沒有变化，所以 (t^2-1) 的值在綫段 EF 上是 $t^2-1=(1-t^2)e^{i\pi}$，在綫段 DB 上是 $t^2-1=(1-t^2)e^{-i\pi}$.



图 17.4

小圓上的积分由于 $\varepsilon\to0$ 而趋于 $O(\varepsilon^{\nu+1})$，从而消失。于是由

(17.14)有

$$Q_\nu(z)=\frac{e^{i\nu\pi}-e^{-i\nu\pi}}{4i\sin\nu\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+1}}dt=\frac{1}{2^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}dt,$$

即得到了

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}dt,\quad \mathrm{Re}(\nu+1)>0. \tag{17.15}$$

这个积分对 $z=\pm1$ 确实对数式地发散。

当 $\nu=n$(n 是正整数或是 0)时，$Q_n(z)$ 可用 $Q_n(z)=\lim\limits_{\nu\to n}Q_\nu(z)$ 来定义。由于这时(17.14)成为不定形,所以直接在 (17.15) 中代以 $\nu=n$ 即可。这时,积分可用初等函数求出,而得

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1},\quad Q_1(z)=\frac{z}{2}\log\frac{z+1}{z-1}-1,$$

$$Q_2(z)=\frac{1}{2}P_2(z)\log\frac{z+1}{z-1}-\frac{3}{2}z,\cdots$$

(参照(17.31)及(17.34))。

当 $\mathrm{Re}(\nu+1)>0$, $|z|>1$ 时,根据二项式定理,对于 $(z-t)^{-\nu-1}$ 有下面的展开公式

$$(z-t)^{-\nu-1}=z^{-\nu-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-\nu-1}=z^{-\nu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t}{z}\right)^m.$$

把这个式子代入(17.15),并且注意当 $m=$ 偶数 $2p$ 时,有

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\nu t^m\,dt=\int_0^1(1-s)^\nu s^{p-\frac{1}{2}}\,ds=B\left(\nu+1,\ p+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+p+\frac{3}{2}\right)},$$

当 $m=$ 奇数时,这种积分是 0, 这样, 对代入的结果进行逐项积分后,就得到了 $Q_\nu(z)$ 在无限远点近傍的展开式,即

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{(2z)^{\nu+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2p+1)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2p+1)\Gamma\left(\nu+p+\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{z^{2p}}$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{z^{\nu+1}}\left\{1+\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2(2\nu+3)}\frac{1}{z^2}+\cdots\right\}. \quad (17.16)$$

利用公式(1.23)，即$\Gamma(2q)=2^{2q-1}\Gamma(q)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}$，把上式变形，就能够把結果表示成超几何函数(参照(11.6))。即

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{(2z)^{\nu+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2^{\nu+2p}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}+p\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{2^{2p}\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma(p+1)\Gamma\left(\nu+p+\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{z^{2p}}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{2z^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)(2z)^{\nu+1}}F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right). \quad (17.17)$$

根据解析延拓的理由，这个公式对于任意的ν都成立(限于两边都有意义时)。由这里可以看到，若是$\mathrm{Re}\,\nu>-1$，则当$z\to\infty$时，$Q_\nu(z)$与$z^{-\nu-1}$成比例地趋于0。若是$\nu\neq$正整数，则±1成为支点，这时，如果引入連結-1与1的綫段作为剖綫，则可以把函数单值化。又当ν是負整数时，由于分子$\Gamma(\nu+1)$的关系而使$Q_\nu(z)$成为无限大，这时仅$\frac{Q_\nu(z)}{\Gamma(\nu+1)}$有意义。

5. Legendre 函数所滿足的遞推公式 現在我們来求不同次数的 Legendre 函数之間的关系式，为了这个目的，对

$$(1)\qquad \frac{1}{\nu+1}\frac{d}{dt}\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+1}}=\frac{2t(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}-\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}$$

沿着(17.4′)中的积分路綫进行积分，由于左边等于0，所以得到

$$0=2\oint_{C_1}\frac{t(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu+1}}dt-\oint_{C_1}\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}dt.$$

对第一个积分可作如下的变形

$$2\oint_{C_1}\frac{(t-z+z)(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu+1}}dt$$

$$=2\oint_{C_1}\frac{(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu}}dt+2z\oint_{C_1}\frac{(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu+1}}dt.$$

将结果代入上式，并把整个方程除以 $2^{\nu+2}\pi i$，并应用(17.5)，就有

$$\frac{1}{2^{\nu+1}\pi i}\oint_{C_1}\frac{(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu}}dt+zP_{\nu}(z)=P_{\nu+1}(z). \quad (17.18)$$

将整个方程对 z 微分，于是第一项成为 $\nu P_{\nu}(z)$，結果得

$$P'_{\nu+1}(z)-zP'_{\nu}(z)=(\nu+1)P_{\nu}(z). \quad (17.19)$$

如果把积分路綫取成图 17.3 中的曲綫，則可以对 $Q_{\nu}(z)$ 作完全同样的討論，而能得到在上列公式中以 Q 代 P 的公式。

（2）现在推导第二种关系。令

$$\frac{d}{dt}\frac{t(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu}}=\frac{(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu}}-\nu\frac{t(t^2-1)^{\nu}}{(t-z)^{\nu+1}}+\frac{2\nu t^2(t^2-1)^{\nu-1}}{(t-z)^{\nu}}.$$

把第二项中的 t 写成 $(t-z)+z$，第三项中的 t^2 写成 $(t^2-1)+1$，并将方程除以 $2\pi i\cdot 2^{\nu}$，而用与(1)中同样的积分路綫作积分，就有

$$0=\frac{\nu+1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{(t^2-1)^{\nu}}{2^{\nu}(t-z)^{\nu}}dt-\frac{\nu z}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{(t^2-1)^{\nu}}{2^{\nu}(t-z)^{\nu+1}}dt$$

$$+\frac{2\nu}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{(t^2-1)^{\nu-1}}{2^{\nu}(t-z)^{\nu}}dt.$$

利用(17.18)来写第一项，立刻就能得到下面的关系式

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z)-(2\nu+1)zP_{\nu}(z)+\nu P_{\nu-1}(z)=0. \quad (17.20)$$

对于 $Q_{\nu}(z)$ 有同样类型的公式。

（3）$(17.19)\times(\nu+1)-\frac{d}{dz}(17.20)$ 中已消去了 $P'_{\nu+1}(z)$，再用 ν 除这个方程，就得到了

$$P'_{\nu-1}(z)=zP'_{\nu}-\nu P_{\nu}. \tag{17.21}$$

由(17.19)减去(17.21)，就有

$$P'_{\nu+1}(z)-P'_{\nu-1}(z)=(2\nu+1)P_{\nu}. \tag{17.22}$$

接連地使用这个公式，就得

$$P'_{\nu}-P'_{\nu-2n}=(2\nu-1)P_{\nu-1}+(2\nu-5)P_{\nu-3}+\cdots$$
$$+(2\nu-4n-1)P_{\nu-2n-1}. \tag{17.22'}$$

把(17.21)×z 与在(17.19)中令 $\nu\to\nu-1$ 后所得的式子相加，则能消去 $P'_{\nu-1}$，而得到

$$(1-z^2)P'_{\nu}(z)=\nu(P_{\nu-1}(z)-zP_{\nu}(z)). \tag{17.23}$$

这个公式告訴我們，$\underset{(\nu)}{T}=\frac{1}{\nu}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}+\nu z\right]$ 是使得 $P_{\nu}(z)$ 的次数下降1的运算子。

又如利用(17.20)，把(17.23)右边的 $\nu P_{\nu-1}(z)$ 加以换写，則得

$$(1-z^2)P'_{\nu}(z)=(\nu+1)(-P_{\nu+1}(z)+zP_{\nu}(z)). \tag{17.24}$$

于是告訴我們，

$$\overset{(\nu)}{T}=\frac{-1}{\nu+1}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}-(\nu+1)z\right]$$

是使得 $P_{\nu}(z)$ 的次数上升1的运算子。因为 $P_{\nu}(z)$ 的次数，由于 $\underset{(\nu)}{T}$ 的作用下降1，而由于 $\overset{(\nu-1)}{T}$ 的作用又上升1而恢复到 $P_{\nu}(z)$，因此有下面的关系式

$$\overset{(\nu-1)}{T}\underset{(\nu)}{T}P_{\nu}(z)=\frac{-1}{\nu^2}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}-\nu z\right\}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}+\nu z\right\}P_{\nu}(z)$$
$$=P_{\nu}(z).$$

另外还成立着和这个关系式相反的关系，卽

$$\underset{(\nu+1)}{T}\overset{(\nu)}{T}P_{\nu}(z)=P_{\nu}(z).$$

这个关系式显然就是微分方程(17.1)。

此外，$Q_\nu(z)$ 具有与 $P_\nu(z)$ 同类型的遞推公式。但是由于当 $\nu=$ 負整数时 $Q_\nu(z)$ 趋于无限大，所以这时的公式一般不能使用。但是在应用方面特别常見的，是如何用遞推公式来表現 Q_{-1} 与 Q_0 之間的关系，由(17.16)，并注意关系式

$$\lim_{\nu\to0}\nu Q_{\nu-1}(z)=\lim_{\nu\to0}\nu\Gamma(\nu)=\Gamma(1)=1$$

后，就得到与(17.20)及(17.23)相当的公式

$$Q_1(z)-zQ_0+1=0, \tag{17.25}$$

$$(1-z^2)Q_0'=1. \tag{17.26}$$

6. $P_\nu(z)$ 与 $Q_\nu(z)$ 的关系 这两个函数都是方程(17.1)的解，并且满足同一种遞推公式。現在把 Q_ν 的微分方程乘以 P_ν，把 P_ν 的微分方程乘以 Q_ν 后，将两式相减，就得

$$0=P_\nu\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}Q_\nu(z)\right\}-Q_\nu\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{d}{dz}P_\nu(z)\right\}$$

$$=\frac{d}{dz}\{(1-z^2)(P_\nu Q_\nu'-Q_\nu P_\nu')\}.$$

把上面的公式积分，并設积分常数为 c，則有

$$P_\nu(z)Q_\nu'(z)-Q_\nu(z)P_\nu'(z)=\frac{c}{1-z^2}. \tag{17.27}$$

为了确定常数 c 的値，令 $z\to\infty$，并比較 z^{-2} 的系数。由(17.3)，(15.1)及(17.16)就有，当 $z\to\infty$ 时，

$$P_\nu(z)\to\Gamma(2\nu+1)z^\nu/2^\nu[\Gamma(\nu+1)]^2,$$

$$Q_\nu(z)\to\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)\Big/2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)z^{\nu+1}.$$

所以

$$P_\nu Q_\nu'-Q_\nu P_\nu'\to$$

$$\to-\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+1)(2\nu+1)/2^{2\nu+1}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)z^2.$$

根据 Γ 函数的倍角公式，右边等于 $-z^{-2}$，所以与(17.27)的右边

$\to -c/z^2$ 比較，就能証明 $c=1$，即

$$P_\nu(z)Q'_\nu(z)-Q_\nu(z)P'_\nu(z)=\frac{1}{1-z^2}. \qquad (17.28)$$

再利用(17.24)把(17.27)中的 Q'_ν，P'_ν 换写，然后再令 $\nu\to\nu-1$，則得

$$P_\nu(z)Q_{\nu-1}(z)-P_{\nu-1}(z)Q_\nu(z)=1/\nu. \qquad (17.29)$$

下面再求 $Q_n(z)$ 的表达式。为了这个目的，使(17.27)除以 $[P_\nu(z)]^2$，然后把公式写成

$$d(Q_\nu/P_\nu)/dz=1/[(1-z^2)P_\nu^2],$$

而施以积分，則有

$$Q_\nu(z)=P_\nu(z)\int_z^\infty\frac{dt}{(t^2-1)\{P_\nu(t)\}^2}. \qquad (17.30)$$

現在設 ν 是正整数 n，注意 $\{P_n(\pm1)\}^2=1$，并用部分分式将被积函数展开而积分，結果形式地得到了❶ ⑮

$$Q_n(z)-\frac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1}=-W_{n-1}(z). \qquad (17.31)⑮$$

等式的左边当 $z\to\infty$ 时近似于 z^{n-1}，而在有限域中，由于 $Q_n(z)$ 的奇异点 ±1 被抵消了，所以是正則的。因此現在所引入的新函数 $W_{n-1}(z)$ 非是 $n-1$ 次的多項式不可。

沿着連結 $z=\pm1$ 的剖綫，$\arg\{(z+1)/(z-1)\}$ 在上岸（即 $z=x+i0$ 处）是 $-\pi$，在下岸(即 $z=x-i0$ 处)是 π，把(17.31)写成

$$Q_n(x\pm i0)=\frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{1+x}{1-x}\mp\frac{\pi i}{2}P_n(x)-W_{n-1}(x). \quad (17.32)$$

如果有必要討論在实軸的 $-1<x<1$ 上函数 $Q_n(x)$ 的值，通常可以把上面式子分成虛实两部，并且把不与 $P_n(x)$ 成定比的那一部分，即

---

❶ 参看寺澤寬一：自然科学者的数学概論(岩波书店)，424 頁。

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{1+x}{1-x}-W_{n-1}(x),\quad (-1<x<1)$$

作为 $Q_n(x)$ 的定义。

现在把(17.31)代入到(17.1)，就得 $W_{n-1}(z)$ 所满足的微分方程

$$L_n[W]=(1-z^2)\frac{d^2W}{dz^2}-2z\frac{dW}{dz}+n(n+1)W=2\frac{dP_n}{dz}. \quad (17.33)$$

把 W_{n-1} 展开为 $W_{n-1}=\sum_0^{n\geq 2m+1}a_mP_{n-2m-1}(z)$，并代入到(17.33)式，考虑(17.22)，并使用关系 $L_n[P_{n-2m-1}]=\{n(n+1)-(n-2m-1)(n-2m)\}P_{n-2m-1}$，就得到了

$$a_1\{n(n+1)-(n-1)n\}P_{n-1}+a_2\{n(n+1)-(n-3)(n-2)\}\cdot P_{n-3}+\cdots=2\{(2n-1)P_{n-1}+(2n-5)P_{n-3}\cdots\}.$$

比较两边 P_ν 的系数来决定 a_n，最后就有

$$W_{n-1}=\frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}+\frac{2n-5}{3\cdot(n-1)}P_{n-3}+\frac{2n-9}{5\cdot(n-2)}P_{n-5}+\cdots. \quad (17.34)$$

§18 陪 Legendre 函数

1. 超球函数与陪 Legendre 函数

方程

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right\}w=0 \quad (18.1)$$

是方程(17.1)一般化后的情形，它以 $z=\pm1$ 及 ∞ 为正则奇异点，解的指数的决定方程是 $\lambda(\lambda-1)+\lambda-\frac{\mu^2}{4}=0\ (z=\pm1)$ 及 $-\lambda(\lambda+1)+2\lambda+\nu(\nu+1)=0\ (z=\infty)$，所以指数分别是

$\pm\frac{\mu}{2}(z=\pm1)$，$-\nu$，$\nu+1(z=\infty)$。使用(8.3)与(8.8)，可将一般的解表示为

$$w=P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & -\nu & z \\ -\frac{\mu}{2} & -\frac{\mu}{2} & \nu+1 & \end{Bmatrix}$$

$$=(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\nu+\mu & z \\ -\mu & -\mu & \nu+\mu+1 & \end{Bmatrix}. \tag{18.2}$$

这样一般化的解叫做陪 Legendre 函数。

如果置 $w=(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}v(z)$，与(15.21)对比，就能知道 $v(z)$ 是超球函数，并在(15.22)中，作代换 $\nu\to\mu$，$\lambda\to\nu-\mu$ 后，就得到了 v 所满足的超球方程

$$(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2(\mu+1)z\frac{dv}{dz}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)v=0. \tag{18.3}$$

通常把方程的解記作 $P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}$，$Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}$，它們常在研究 $(2\mu+3)$ 維的超球面調和函数中出現。

如果对(18.2)与(17.2)进行对比，当 μ 是正整数 m 时，根据(14.9)，$v(z)$ 是(17.2)經 μ 次微分的結果。自然也可以由(17.1)經 μ 次微分后所得的方程来确定。現在对(17.5)及(17.14)进行 μ 次微分，得

$$P_\nu^{(\mu)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\oint_{C_1}^{(1+,z+)}\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+\mu+1}}dt, \tag{18.4}$$

$$Q_\nu^{(\mu)}(z)=\frac{(-1)^{\mu\pi i}}{4i\sin\nu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\oint_{C_2}^{(1-,1+)}\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(z-t)^{\nu+\mu+1}}dt. \tag{18.5}$$

普通所用的超球方程的解，是上面两个函数分别乘以一个适当的

常数后所得到的函数，即

$$P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)=2^{\mu}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}P_{\nu}^{(\mu)}(z),$$
$$Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)=2^{\mu}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}Q_{\nu}^{(\mu)}. \tag{18.6}$$

最后，对这两个解分别乘以 $[1-z^2]^{\frac{\mu}{2}}$ 或 $[z^2-1]^{\frac{\mu}{2}}$，就得到(18.1)的解为

$$P_{\nu}^{\mu}(z)=[1-z^2]^{\frac{\mu}{2}}P_{\nu}^{(\mu)}(z), \tag{18.7}$$

$$Q_{\nu}^{\mu}(z)=[z^2-1]^{\frac{\mu}{2}}Q_{\nu}^{(\mu)}(z). \tag{18.8}$$

这两个函数 $P_{\nu}^{\mu}(z)$ 与 $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ 分别叫做第一种与第二种陪 Legendre 函数，ν 叫做次数，μ 叫做位数。我們約定 $[1-z^2]$ 同时可以代表 z^2-1 或是 $1-z^2$. 当 $1>|z|$ 时，以后者作为定义，当 $|z|>1$ 时以前者作为定义。

虽然上面是在 $\mu=$ 正整数的假設下导出积分表示的，可是对于一般的 μ，問題沒有什么本質的变化。这时仅须在(18.4)中把 $(1_+, z_+)$ 这样的积分路綫换为前面几次出現的 $(z_+1_+z_-1_-)$ 这样的二重結环路，并除以系数 $1-e^{2\nu\pi i}$ 即可。此外，这个函数的値以及(18.4)的值，都可用(18.3)的解的值依照下面的方式給出

$$[1-z^2]^{-\frac{\mu}{2}}P_{\nu}^{\mu}(z)=P_{\nu}^{(\mu)}(z)$$
$$=\frac{(z-1)^{-\mu}}{\Gamma(1-\mu)}F\left(\nu+1,\ -\nu;\ 1-\mu;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{18.9}$$

最后一个等式可以容易地通过代换 $(1-t)/2\to\zeta$, $(1+t)/2\to1-\zeta$, $(1-z)/2\to z$, 并且把(12.16)与(12.17)比較而得出。

又对于(18.5)成立着同样的关系，这里有

$$[z^2-1]^{-\frac{\mu}{2}}Q_\nu^\mu(z)=Q_\nu^{(\mu)}(z)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}z^{-\nu-\mu-1}$$

$$\times F\left(\frac{\nu+\mu+2}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right),\quad(18.10)$$

因此对于 $Q_\nu(z)$ 同样地能証明，当 $\text{Re}(\nu+\mu+1)>0$，并且 $z\to\infty$ 时，它的值趋于 0．

此外，由 (18.4)，(18.5)，(18.9)，(18.10) 及(13.2) 就能了解 $P_\nu^{(\mu)}(z)$ 及 $Q_\nu^{(\mu)}(z)$ 一般在 $z=1$ 处不是正則的(除非 μ 是整数)，并且由于 (18.2) 及 (18.9)，可以断定，它在 $z=1$ 的奇异性与函数 $(z-1)^{-\mu}$ 相同。除去 μ 是負整数的情形，(18.3) 在 $z=1$ 处的正則解，据(18.2)及(11.2)可以写成

$$\widetilde{P}_\nu^{(\mu)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^\mu\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu+1)}$$

$$\times F\left(\nu+\mu+1,\ \mu-\nu;\ 1+\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).\quad(18.11)$$

另外，当 μ 是正整数 m 时，对(17.3) 及 (14.10) 連續施以 m 次微分，則得

$$P_\nu^{(m)}(z)=\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z)=\frac{d^m}{dz^m}F\left(-\nu,\nu+1,1;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^m}\frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(1-\nu+m-1)\cdot(\nu+1)\cdots(\nu+m)}{\Gamma(m+1)}$$

$$\times F\left(-\nu+m,\ \nu-m+1;\ 1+m;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2^m\Gamma(m+1)\Gamma(\nu-m+1)}F\left(\nu+m+1,m-\nu;1+m;\frac{1-z}{2}\right).$$

$$(18.12)$$

这个式子和在 (18.11) 中令 $\mu=m$ 所得的結果完全一致，即

$P_\nu^{(m)}(z)$ 在 $z=1$ 处正則，（这个式子还可用 (18.9) 导出，即在 (18.9) 的級数展开中直接令 $\mu\to m$，就能求出 (18.12)。）于是得关系式

$$P_\nu^{(m)}(z)=\widetilde{P}_\nu^{(m)}(z)=\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z). \qquad (18.13)$$

又如果在 (18.9) 及 (18.11) 中，作代换 $\nu\to-\nu-1$，还能得到

$$\left.\begin{aligned}&P_{-\nu-1}^{(\mu)}(z)=P_\nu^{(\mu)}(z),\\&\widetilde{P}_{-\nu-1}^{(\mu)}(z)=\frac{\sin\pi(\nu+\mu)}{\sin\pi(\nu-\mu)}\widetilde{P}_\nu^{(\mu)}(z).\end{aligned}\right\} \qquad (18.14)$$

2. 遞推公式 对积分表示 (18.4) 及 (18.5) 用前节 (1) (2) 中同样的方法处理，就能得到关于 $P_\nu^{(\mu)}$, $Q_\nu^{(\mu)}$ 的遞推公式。譬如用与 (1) 同样的积分路綫，对 $d[(t^2-1)^{\nu+1}/(t-z)^{\nu+\mu+1}]/dt$ 环繞一周积分后，有关系式

$$Q_{\nu+1}^{(\mu+1)}-zQ_\nu^{(\mu+1)}=(\nu+\mu+1)Q_\nu^{(\mu)}. \qquad (18.15)$$

用与 (2) 同样的积分路綫，对 $d[t(t^2-1)^\nu/(t-z)^{\nu+\mu}]/dt$ 环繞一周积分后，有关系式

$$(\nu+1-\mu)Q_{\nu+1}^{(\mu)}-(2\nu+1)zQ_\nu^{(\mu)}+(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^{(\mu)}=0. \qquad (18.16)$$

对于 $P_\nu^{(\mu)}$ 也成立相同类型的关系。

如果分别乘以 $[1-z^2]^{\frac{\mu+1}{2}}$ 及 $[1-z^2]^{\frac{\mu}{2}}$，就得陪 Legendre 函数的遞推公式

$$Q_{\nu+1}^{\mu+1}(z)-zQ_\nu^{\mu+1}(t)=(\nu+\mu+1)[1-z^2]^{\frac{1}{2}}Q_\nu^\mu(z), \qquad (18.17)$$

及

$$(\nu+1-\mu)Q_{\nu+1}^\mu(z)-(2\nu+1)zQ_\nu^\mu(z)+(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(z)=0. \qquad (18.18)$$

§19 陪 Legendre 多项式与球面調和函数

在陪 Legendre 函数中，有重要实际应用的是次数为 n 或位

数是整数的这一种。当 $m=0$ 时，它就是 Legendre 函数。

1. 位数是負整数的情形 首先取 z 为 -1 与 $+1$ 間的实数，幷設 $[z^2-1]=z^2-1$. 这时，方程 (18.1) 具有 $P_\nu^m(z)$ 与 $Q_\nu^m(z)$ 以及 $P_\nu^{-m}(z)$ 与 $Q_\nu^{-m}(z)$ 两种类型的解，幷且明显地当 m 的符号变更时，这两組解相互交换。現在討論一下对于正的 m，两者間的关系。首先用(11.7)换写(18.11)，由(18.7)对于 $P_\nu^m(z)$ 有

$$P_\nu^m(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\Gamma(\nu-m+1)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}F\left(\nu+1,-\nu;m+1;\frac{1-z}{2}\right). \tag{19.1}$$

另一方面，由于(18.9)，对于 $P_\nu^{-m}(z)$ 成立着

$$P_\nu^{-m}(z)=(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}P_\nu^{(-m)}=\frac{1}{m!}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$\times F\left(\nu+1,-\nu;\ m+1;\frac{1-z}{2}\right). \tag{19.2}$$

于是得到关系式

$$P_\nu^{-m}(z)=\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(z). \tag{19.3}$$

同样地，在 (18.10) 中令 $\mu=-m$，与 (11.7) 中令 $\mu=m$ 后的变形式比較，能得到同一个关系式。又如果对 $[1-z^2]$ 以 $1-z^2$ 为定义，則仅需在(19.3)中加入系数 $(-1)^m$ 即可。

2. 正交关系式与球面函数展开 如果陪 Legendre 函数的次数与位数都是整数，則能把它写成 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\times$（多項式）的形状。对于位数相同的陪函数成立着关系式

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_l^m(x)dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}dx$$

$$=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}\delta_{nl},\quad \delta_{nl}=\begin{cases}1, & n=l,\\ 0, & n\neq l.\end{cases} \tag{19.4}$$

这一点以前在講 Jacobi 多項式时已闡明过。这个公式也能由

(19.3)，先将被积函数 $P_n^m P_l^{-m}$ 变形，然后利用 Rodrigues 公式

$$P_n^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n \tag{19.5}$$

并施以分部积分导出⑤。

对 (19.4)，把积分变数用代换 $x=\cos\theta$ 变更，并以 θ 为积分变数，就可得到下面的写法

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}\delta_{nl}. \tag{19.4'}$$

3．球面函数展开 球面上满足周期性以及正則性条件的球面調和函数 $Y(\theta,\varphi)$（参照 72 頁(3)，令 $\nu=n$），可以表示成为

$$Y_n(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix},\quad 0\leqslant m\leqslant n \tag{19.6}$$

的綫性組合。因为函数对 φ 具有周期性，所以 m 限定是整数。如果 $P_n^m(\cos\theta)$ 中的 n 不是整数的話，那么，由 (19.1)式，或是由对 Legendre 函数 m 次微分后所得到的公式，就能明白，当 $\theta=\pi$，即 $\cos\theta=-1$ 时，P_n^m 发散，故此必需也把 n 取作整数。又当 $n<m$ 时，据(19.5)，函数恒等于 0，所以(19.6)在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 及 $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ 中組成一个完备系，面对任意的球面調和函数 $f(\theta,\varphi)$ 能有下面的展开形式

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^\infty A_n P_n(\cos\theta)+\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^n(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta). \tag{19.7}$$

現在我們来决定这里出現的系数 A_n，A_{mn}，B_{mn}。

首先注意一下(19.4)以及三角函数的正交关系

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\cos p\varphi\, d\varphi&=\pi\delta_{mp},\quad m,p\neq 0\\ &=2\pi,\quad m=p=0,\end{aligned} \tag{19.8}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin m\varphi\sin p\varphi\, d\varphi=\pi\delta_{mp}.$$

把(19.7)的两边都乘以 $P_n^m \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$，然后对单位球面（面素 $dS=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,\ 0\leqslant\theta<\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi$）施以积分，则由(19.4)及(19.8)，立刻就得到了

$$\left.\begin{aligned}&A_n=\frac{2n+1}{4\pi}\iint f(\theta,\ \varphi)P_n(\cos\theta)dS,\\&\frac{A_{nm}}{B_{nm}}=\frac{2n+1}{2\pi}\ \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint f(\theta,\ \varphi)\ P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}dS.\end{aligned}\right\}\tag{19.9}$$

特别如果 $f(\theta,\ \varphi)$ 是 p 次的球面調和函数 $Y_p(\theta,\ \varphi)$，自然它将是 $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$，$P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 的綫性組合。于是(19.9)中除去 $n=l$ 的情形以外，其余的都等于0. 此外明显地能看出，次数不同的球面調和函数 $Y_n(\theta,\ \varphi)$ 及 $Y_m(\theta,\ \varphi)$ 具有正交关系[7]

$$\iint Y_n(\theta,\ \varphi)Y_m(\theta,\ \varphi)dS=0,\quad m\neq n.\tag{19.10}$$

4. 加法定理 現在考虑三个单位向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}$，以 $\boldsymbol{B}$ 为极坐标的軸，幷設 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 的方向分别是 $(\theta,\ \varphi)$ 及 $(\theta',\ \varphi')$，两个向量的夹角是 Θ. 如以 B 为 z-軸，而作 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 的数量积，则得

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi').\tag{19.11}$$

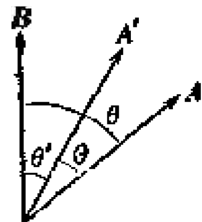


图 19.1

此外，如果以 $\boldsymbol{A}'$ 为軸来考虑 $P_n(\cos\Theta)$ 的話，则它是 n 次的球面調和函数。如果固定了 $\boldsymbol{A}'$，则这个函数是 θ 及 φ 的函数，幷且根据(19.7)及(19.10)可以用下面的形状来表达

$$P_n(\cos\Theta)=A_nP_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta).\tag{19.12}$$

考虑到(19.11)，就能把系数 A_n，A_{nm}，B_{nm} 表示成 θ' 与 φ' 的函数。如由(19.9)，对于 A_{nm} 有

$$A_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$\times\iint P_n(\cos\Theta)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\,dS. \qquad (19.13)$$

現在如以 A' 为軸而引入新的球面坐标系 (Θ,ϕ)，就可得到 n 次球面調和函数 $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ 对 Θ 及 ϕ 的展开式

$$P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi=a_0P_n(\cos\Theta)$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(a_{nm}\cos m\phi+b_{nm}\sin m\phi)P_n^m(\cos\Theta) \qquad (19.14)$$

(系数是依賴于 θ' 及 φ' 的函数)。

現在令 $\Theta=0$, 即使 A 与 A' 一致，这样，等式的左边就成为 $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi'$，并且由于 $P_n(1)=0$, $P_n^m(1)=0$，所以右边成为 a_0，从而得到了 $a_0=P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi'$. 把 (19.14) 代入到 (19.13) 式，并利用(19.8)和(19.9)，则有

$$A_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}a_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[P_n(\cos\Theta)^2]\sin\Theta\,d\Theta\,d\phi$$

$$=2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi'.$$

同样地能够得到

$$A_n=P_n(\cos\theta'),\ B_{nm}=\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta')\sin m\varphi'.$$

把这些式子代入到(19.12)，則得

$$P_n(\cos\Theta)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')$$

$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi'). \quad (19.15)$$

这个公式叫做球函数的加法定理。利用(19.3)可以把公式写成

$$P_n(\cos\Theta)=\sum_{m=-n}^{n}P_n^m(\cos\Theta)P_n^{-m}(\cos\Theta)e^{i m(\varphi-\varphi'+\pi)}. \quad (19.15')$$

这里的 P_n^m 应該取作 $\sin^m\theta\,P_n^{(m)}(\cos\theta)$。

第5章　合流型超几何函数

§20　合流型超几何級数与 Whittaker 函数

本章的目的是討論作为合流型超几何微分方程(9.1)，即

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dw}{dz}-\alpha w=0 \tag{20.1}$$

的解而定义的函数，以及与这种函数密切有关的一些問題。我們在§9中已經講过，方程(20.1)可以由超几何方程以 $\frac{z}{\beta}$ 代換 z，并取 $\beta\to\infty$ 的极限而得到。这里 $z=0$ 是一个正則奇异点，$z=\infty$ 是由两个正則奇异点合流后所产生的非正則奇异点。

此外，利用簡单的变数代換，可以把(20.1)写成标准形，即沒有一阶导数項的形状。要达到这个目的，只要令 $w=e^{\frac{z}{2}}z^{-\frac{\gamma}{2}}u$ 即可。經过簡单的計算就能得到 u 所滿足的方程(見(9.3))

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\frac{\gamma}{2}-\alpha}{z}-\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{z^2}\right)u=0. \tag{20.2}$$

令

$$\alpha=\mu-\varkappa+\frac{1}{2},\quad \gamma=2\mu+1,$$

就能将方程写成

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\varkappa}{z}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right)u=0. \tag{20.3}$$

这种形状的方程叫做 Whittaker 方程。

1. 合流型超几何級数　$z=0$ 是方程(20.1)的正則奇异点，此处的指数是0与 $1-\gamma$，方程在此处一般有两个解，一个是由 z^0（常数項）开始的整冪級数形式的解，另一个解的級数是由 $z^{1-\gamma}$ 开始。

这种解可以直接地算出，也可以在超几何方程的解中，以 $\frac{z}{\beta}$ 代替 z，并令 $\beta\to\infty$ 求得。故此整幂級数形式的解，可以由

$$\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{\beta}\right)$$

导出。由于

$$F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{\beta}\right)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}\frac{z}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{\beta^2}+\cdots,$$

因此当 $\beta\to\infty$ 时，就能得到下面的解

$$w_1=1+\frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots. \tag{20.4}$$

这个解一般記作 ${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$，或是簡单地写成 $F(\alpha;\gamma;z)$，它叫做合流型超几何級数。

至于具有指数为 $1-\gamma$ 的第二个解，由(11.9)有

$$w_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ z)$$

$$=z^{1-\gamma}\left\{1+\frac{1-\gamma+\alpha}{2-\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{(1-\gamma+\alpha)(2-\gamma+\alpha)}{(2-\gamma)(3-\gamma)}\frac{z^2}{2!}+\cdots\right\}. \tag{20.5}$$

級数(20.4)与(20.5)对于一切有限的 z 都是收斂的。

对于一般的 γ，(20.4) 与 (20.5) 就是两个独立的解。但是当 $\gamma=0$ 或是 $\gamma=$ 整数时便不然，而且当 $\gamma=1$ 时这两个解完全一致。当 γ 是大于或等于 2 的整数时，w_2 将失去意义，同样地当 γ 是負整数或是 0 时，w_1 将失去意义。所以在这些情形中都需要用别的方法，譬如用 Frobenius 的方法，作成含有对数项的第二个解。一般如在(20.1)中，令 $w=z^{1-\gamma}w'$，則 w' 满足一个与(20.1)同类型的微分方程，只是这时的 γ 与 α 分别成为 $2-\gamma$ 与 $1-\gamma+\alpha$，因此恒可以把 $\gamma=0$ 或是 $\gamma=$ 負整数的情形归結为 $\gamma=$ 正整数的情形，所以以后只考虑 $\gamma\geqslant1$ 的情形。

首先設 $\gamma=1$. (7.8) 中的函数 $f(z,\mu)$，参照了 (11.4) 与 (20.4) 后，就有下面的写法(也可以直接算出)[①]

$$f(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) z^{n+\mu},$$

其中

$$a_n(\mu) = (\alpha+\mu)(\alpha+\mu+1)\cdots(\alpha+\mu+n-1)[(1+\mu)(1+\mu+1)$$
$$\cdots(1+\mu+n-1)(\gamma+\mu)(\gamma+\mu+1)\cdots(\gamma+\mu+n-1)]^{-1}, \quad (20.6)$$

$a_0 = 1$.

把这个結果对 μ 微分，并令 $\mu=0$，$\gamma=1$，則有

$$\frac{\partial}{\partial\mu} f(z, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0) z^n + F(\alpha;1;z)\log z,$$

这里有[3]

$$\frac{a_n'(0)}{a_n(0)} = \left[\frac{\partial}{\partial\mu}\log a_n(\mu)\right]_{\mu=0} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha+k} - \frac{2}{1+k}\right),$$

$$a_n(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(n!)^2}.$$

所以当 $\gamma=1$ 时，就得到第二个解 $F_2(\alpha;1;z)$，即

$$F_2(\alpha;1;z) = F(\alpha;1;z)\log z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(n!)^2}$$
$$\cdot\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha+k} - \frac{2}{1+k}\right)\right\} z^n. \quad (20.6')$$

又在 $\gamma=m+1$（m 正整数）的情形，取指数 $\mu=1-\gamma$ 为 $-m$，这时第二种解的某項的分母中能出現 0，因此我們象下面这样地取一个比較复杂的常数項：

$$a_0(\mu) = \frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+2m)}{(\mu+\alpha)(\mu+\alpha+1)+(\mu+\alpha+m-1)},$$

并作 $\frac{\partial}{\partial\mu} f(z, \mu)$，然后代入 $\mu=-m$，則得[3]

$$F_2(\alpha;m+1;z) = F(\alpha;m+1;z)\log z$$
$$-(-1)^m m!\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n(m-n-1)z^{n-m}}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+n)}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!(m+1)\cdots(m+n)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{m+k+1} - \frac{1}{k+1}\right)\right\} z^n.$$

(20.7)

因为对应于指数 $1-\gamma=-m$ 的第二項当 $z\to 0$ 时与 z^{-m} 成比例地趋于无限大，所以有必要在第一項中加入 $\log z$。此外，如果 α 是介于 1 与 m 之間的整数 l，则将成为例外的情形。这时，可在 (20.5) 中令 $1-\gamma=-m$，于是它的一般項是

$$\frac{(-m+l)(-m+l+1)\cdots(-m+l+n-1)}{(-m+1)(-m+2)\cdots(-m+n)n!}z^n,$$

这样，如果在某一項的分母中出現 $m-m$ 的話($n\geqslant m$)，那么一定在分子中也出現 $m-m$ (注意 $-m+l\leqslant 0$, $-m+l+n-1\geqslant 0$)，从而可以进行約分，結果仍可以使用 (20.5) 作为方程的第二个解。这种情形相当于 §7 第三种情形中 $A=0$ 的結果。

2. Whittaker 函数 当微分方程是 Whittaker 标准形方程 (20.3) 时，在两个独立解 (20.4) 与 (20.5) 中令 $\alpha=\mu-\varkappa+\frac{1}{2}$, $\gamma=2\mu+1$，并乘以函数 $e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}$，就有

$$M_{\varkappa,\mu}(z)=z^{\frac{1}{2}+\mu}e^{-\frac{z}{2}}F\left(\frac{1}{2}+\mu-\varkappa;\ 2\mu+1;\ z\right) \tag{20.8}$$

以及另一解

$$M_{\varkappa,-\mu}(z)=z^{\frac{1}{2}-\mu}e^{-\frac{z}{2}}F\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa;\ -2\mu+1;\ z\right). \tag{20.9}$$

在下一节 (§21) 的討論中将可見到，为了更容易地討論方程的独立解在 $z\to\infty$ 时的性質，我們取 (20.8) 与 (20.9) 的綫性組合 $W_{\varkappa,\mu}(z)$ 比較便利，$W_{\varkappa,\mu}(z)$ 的定义是

$$W_{\varkappa,\mu}(z)^{[1]}=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa\right)}M_{\varkappa,\mu}(z)+\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\varkappa\right)}M_{\varkappa,-\mu}(z). \tag{20.10}$$

这个函数满足关系 $W_{\varkappa,-\mu}(z)\equiv W_{\varkappa,\mu}(z)$，所以对于它就不能象处理 M 那样，用变更 μ 的符号来求得另一个独立的解。但是从方

[1] 这个函数叫做 Whittaker 函数。—— 譯者注

程(20.3)的形状可知,变更 $\varkappa$ 与 z 的符号时方程本身不变,注意到这个事实以后就能写出方程的第二个解为 $W_{-\varkappa,\mu}(-z)$。

§21 积分表示

在前一节中已經求得了超几何微分方程在原点近傍用級数展开式表达的两个独立解。由于这些級数的收斂半徑都是 ∞,所以对 $|z|$ 任意大的値都能使用,但是由于級数当 $|z|$ 相当大时,收斂得很慢,所以用級数的形式来簡捷地研究解在 $z=\infty$ 近傍的性态是不适当的。这句話的意义可以用下面的例子說明,譬如,对微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+w=0$$

可以求得两个解为

$$w_1=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,$$

$$w_2=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots.$$

由这两个級数的形状,就知道当 $z\to\infty$ 时,解 w_1 的变化情形就是 e^z 的变化情形,解 w_2 的情形就是 e^{-z} 的情形。但是对現在所討論的超几何方程,就不能有这种类似的簡单事实。

要討論解在它全部定义区域中全局的性质,利用积分表示比較便利。至于积分表示的推导,可以在§12中已求得的超几何函数的积分表示中,用前节所說的方法进行极限运算而求得,也可以象下面的例題那样,对微分方程的解用定积分的形式求出,这与以前說过的方法比較起来显然是一种新的导出的方法。

如同在(20.1)中那样,对于系数是 z 的一次式的微分方程,假定解在 s 平面上具有如下形状

$$w=\int_C f(s)\,e^{sz}ds, \tag{21.1}$$

函数 $f(s)$ 与积分路綫 C 是可以适当选擇的。把 (21.1) 以及它的导函数

$$\frac{dw}{dz}=\int_C f(s)se^{zs}ds, \quad \frac{d^2w}{dz^2}=\int_C f(s)s^2e^{zs}ds,$$

代入到微分方程 (20.1) 的左边，卽代入到

$$L[w]\equiv z\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dw}{dz}-\alpha w \tag{21.2}$$

后，就得

$$L[w]=\int[(s^2-s)z+(\gamma s-\alpha)]f(s)e^{zs}ds. \tag{21.3}$$

为了在被积函数的括弧內除去 z，可施行分部积分，得

$$L[w]=s(s-1)f(s)e^{zs}\Big|_C$$

$$+\int_C\left[\frac{d}{ds}\{s(1-s)f(s)\}+(\gamma s-\alpha)f(s)\right]e^{zs}ds. \tag{21.4}$$

为了使得全部的結果等于 0，我們可以这样的选擇 $f(s)$，使它满足方程

$$\frac{d}{ds}\{s(1-s)f(s)\}+(\gamma s-\alpha)f(s)=0, \tag{21.5}$$

并且这样地选擇积分路綫 C，使得在 C 的两端处，$s(1-s)f(s)e^{zs}$ 对一切的 z 有相等的值，故此，譬如可以把 C 选擇为 Riemann 选面上的一条閉合曲綫卽可。

解出方程 (21.5)，如 A 是积分常数，則解具有形状如 $f(s)=As^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}$，于是(21.1)成为

$$w=A\int_C s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds. \tag{21.6}$$

决定积分路綫的条件是

$$s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}e^{zs}|_C=0. \tag{21.7}$$

当 $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha)>0$ 时，可取满足(21.7)的积分路綫为

由 0 到 1 的綫段。对于这个积分路綫，可以先用：当 $z=0$ 时 $w=1$ 这个条件决定积分常数 A，于是得到用首項是 1 的幣幂級数所表示的 (20.1) 的解。但是这样的解必需是 $F(\alpha;\gamma;z)$，因此得到了它的写法如下：

$$F(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds,$$

$$(\mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0). \qquad (21.8)$$

事实上，如果把 e^{zs} 用幂級数展开，然后代入上式并作逐項积分，容易看出結果就是 (20.4) 式。

在不滿足 $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0$ 的情形，使用第 1 章中对 B 函数所用的积分路綫即可。即如图 2.3 所示的，由实軸上 0 与 1 之間的一点 A 出发，并設在 A 处有 $\arg s=0$ 及 $\arg(1-s)=0$，分別正向及負向环繞 0 与 1 旋轉一周的曲綫。应用 (2.6)，并用 $z=0$ 时 $w=1$ 的条件决定系数，就得

$$F(\alpha;\gamma;z)=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

$$\cdot\oint^{(1_+,0_+,1_-,0_-)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds. \qquad (21.9)$$

习題 1　对超几何函数的积分表示 (12.15) 用极限法导出 (21.9)。

习題 2　当 γ 是正数时，証明下列的公式：

$$F(\alpha;\gamma;z)=\frac{(\gamma-1)!}{(1-e^{-2\pi i\alpha})\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\oint^{(0_+,1_+)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds. \quad (21.10)$$

对于滿足条件 (21.7) 的积分路綫 C，除了上面所說的曲綫外，还可以采用下面这样的路綫，即由某一使得 $\mathrm{Re}(zs)\to-\infty$ 的方向的无限远点出发，正向繞一轉，然后再沿着这个方向回归到无限远的曲綫 C_1，以及和 C_1 形狀相同，但是繞着 1 正向旋轉一周的曲綫 C_2 所組成的积分路綫。但是被积函数是以 $0,1,\infty$ 为支点的多值函数，所以必須明确規定到底采用函数的那一分支。为此，我們

設 C_1 及 C_2 与 $(0, 1)$ 間的实軸的交点分别为 A 及 B (图 21.1)，并且規定在 A 及 B 处有 $\arg s=0$ 及 $\arg(1-s)=0$. 更正确地說，可以这样来表达：卽設 $\arg z=\theta$，于是沿着积分路綫 C_1 与 C_2，$\arg s$ 以及 $\arg(1-s)$ 的变化如下：

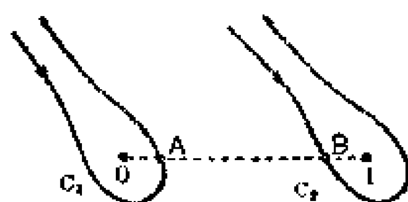


图 21.1

	C_1	C_2
$\arg s$	$-\pi-\theta\to\pi-\theta$	$\pi-\theta\to\pi-\theta$
$\arg(1-s)$	$-\theta\to-\theta$	$-\theta\to 2\pi-\theta$

在这里，对于 C_1 有 $-\frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，对于 C_2 有 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{2}\pi$. 我們在图 21.1 中画出了 $0<\theta<\pi$ 的积分路綫。当 $\theta<0$ 时，C_2 的形状为了避开 $s=0$，一定是曲折的曲綫。此外，为了使沿着积分路綫两端的方向能有 $\mathrm{Re}(zs)\to-\infty$，所以必然有 $\arg s\to\pm\pi-\theta$ 的方向，但是我們要注意，可以这个方向为軸，取角的范圍介于这个方向的 $\pm\frac{\pi}{2}$ 之間，然后在这个范圍中任取一个方向卽可。

为了看清楚各种解之間的关系，可以把 (21.9) 的积分路綫象下面这样加以变形。如图 21.2 所示，把介于 0 与 1 之間的积分路

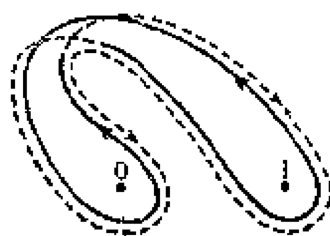


图 21.2

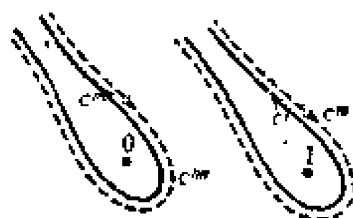


图 21.3

綫提起，然后沿着 $\arg s=\pi-\theta$ 的方向伸延到无限远处，这样，(21.9) 中的积分路綫就成为图 21.3 中的四条曲綫，C'，C''，C'''，

C''''. 沿着这几条曲綫，$\arg s$ 以及 $\arg(1-s)$ 的变化情形如下表所載：

	C'	C''	C'''	C''''
$\arg s$	$\pi-\theta\to\pi-\theta$	$\to 3\pi-\theta$	$\to 3\pi-\theta$	$\to\pi-\theta$
$\arg(1-s)$	$-\theta\to 2\pi-\theta$	$\to 2\pi-\theta$	$\to -\theta$	$\to -\theta$

即路綫 C' 与路綫 C_2 完全一致，而沿着 C''' 的积分，等于負向沿着 C_2 的积分乘以 $e^{2\pi i\alpha}$，于是有

$$\int_{C'}+\int_{C'''}=(1-e^{2\pi i\alpha})\int_{C_2}, \tag{21.11}$$

同样地有

$$\int_{C''}+\int_{C''''}=(e^{2\pi i\gamma}-e^{2\pi i\alpha})\int_{C_1}. \tag{21.12}$$

这样，我們令

$$G_1(\alpha;\gamma;z)=\frac{2}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{sz}ds, \tag{21.13}$$

$$G_2(\alpha;\gamma;z)=\frac{2}{1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_2}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{sz}ds, \tag{21.14}$$

由(21.11)，(21.12)及(21.9)，就可得

$$F(\alpha;\gamma;z)=\frac{1}{2}\{G_1(\alpha;\gamma;z)+G_2(\alpha;\gamma;z)\},$$

$$-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}. \tag{21.15}$$

(21.13)与(21.14)如同 $F(\alpha;\gamma;z)$ 一样，都是合流型微分方程的解，叫做第三种超几何函数。函数 G_1 与 G_2 之間具有非常簡单的关系。如在 G_2 中以 $1-t$ 代替 s 作为积分变数，則有

$$G_2(\alpha;\gamma;z)=\frac{-2}{1-e^{+2\pi i(\gamma-\alpha)}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{z}$$

$$\times\int_{\infty e^{-i\theta}}^{0_+}t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}e^{-zt}dt,$$

这里的积分路綫，是由方向 $\arg t=-\theta$ 的∞点出发，正向繞着0旋轉一周的路綫，再把 z 代成 $-z=e^{-\pi i}z$ 后，这条路綫就与 C_1 完全相同。这样，$G_2(\alpha;\gamma;z)$ 就变成了 $e^zG_1(\gamma-\alpha;\gamma;e^{-\pi i}z)$，簡单地計算了系数之后，就能够得到下面的公式：

$$G_2(\alpha;\gamma;z)=e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}e^zG_1(\gamma-\alpha;\gamma;e^{-\pi i}z),$$

$$-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}. \qquad (21.16)$$

一般 G_1 与 G_2 都是 z 的多值函数。

习題 設 $-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$，証明下列公式

$$F(\alpha;\gamma;z)=\frac{1}{2}\{\widetilde{G}_1(\alpha;\gamma;z)+\widetilde{G}_2(\alpha;\gamma;z)\}, \qquad (21.17)$$

$$\widetilde{G}_1(\alpha;\gamma;z)=e^{-2\pi i\alpha}G_1(\alpha;\gamma;z),\quad -\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}, \qquad (21.18)$$

$$\widetilde{G}_2(\alpha;\gamma;z)=e^zG_1(\gamma-\alpha;\gamma;e^{\pi i}z),\quad -\frac{5\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}. \qquad (21.19)$$

§22 Whittaker 函数与漸近展开式

现在討論一下 $G_1(\alpha;\gamma;z)$ 当 $|z|$ 相当大时的情形，在积分表示 (21.13) 中令 $zs=-t$ 而把积分变数 s 变成 t，并且为了容易看出相角的变化，我們写成 $s=e^{-\pi i}\frac{t}{z}$，卽設

$$s^{\alpha-1}ds=e^{-\pi i\alpha}z^{-\alpha}t^{\alpha-1}dt,$$

于是得到了下面的公式

$$G_1(\alpha;\gamma;z)=\frac{1}{i\sin\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}$$

$$\times\int_\infty^{0+}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}e^{-t}dt. \qquad (22.1)$$

这时，沿着积分路綫，$\arg t$ 由0变到 2π，$\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)$ 由 $-\theta$ 还原成 $-\theta$。

为了研究当 $|z|$ 相当大时，$G_1(\alpha;\gamma;z)$ 的近似值，我們可以对 $\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}$ 按 z 作降幂展开，而有

$$\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}=\sum_{m=0}^{N}\binom{\gamma-\alpha-1}{m}\left(\frac{t}{z}\right)^{m}+R_N.$$

把它代入到(22.1)并且进行逐項积分，使用 Γ 函数的公式(2.3)，就得到[4]

$$\begin{aligned}G_1(\alpha;\gamma;z)&=\frac{\Gamma(\gamma)}{i\sin\pi\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}\\&\quad\cdot\sum_{m=0}^{N}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{m!\Gamma(\gamma-\alpha-m)}z^{-m}\int_{\infty}^{0_+}t^{m+\alpha-1}e^{-t}dt+o(z^{-\alpha-N})\\&=2e^{\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}\Big[1+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m\frac{\alpha_m(\alpha-\gamma+1)_m}{m!}z^{-m}\\&\quad+o(z^{-N})\Big],\qquad -\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2},\end{aligned}\tag{22.2}$$

这里　　$\alpha_m=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1)=\dfrac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}$.

当 $|z|$ 相当大时公式(22.2)对于求 $G_1(\alpha;\gamma;z)$ 的近似值有很大的用处。右边中的 $o(z^{-N})$ 項包含了当 $z\to\infty$ 时，比 z^{-N} 更快地趋于0的項。但是如果簡单地把 N 取作 ∞，所得到的无穷級数是发散的。故此(22.2)的級数实际是某一种漸近展开式。这里所以得到了发散級数的原因，是因为当展开 $\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}$ 时，不論 $|z|$ 是多大，当 t 也取成相当大时，一般展开公式并不成立，故此导出了上面的結果。

对于 $G_2(\alpha;\gamma;z)$ 的漸近展开式，可以使用(21.16)由(22.2)导出，而得到結果

$$\begin{aligned}G_2(\alpha;\gamma;z)&=\frac{2\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{z}z^{\alpha-\gamma}\Big[1+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m\frac{(\gamma-\alpha)_m(1-\alpha)_m}{m!}z^{-m}\\&\quad+o(z^{-N})\Big],\qquad -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}\tag{22.3}$$

根据(22.2)与(22.3)就能了解，当 $z\to\infty$ 时，G_1 的函数形态就近似于函数 $z^{-\alpha}$，而 G_2 的形态就近似于函数 $e^z z^{\alpha-\gamma}$. 而这两个函数的平均值，就是 $F(\alpha;\gamma;z)$ 所近似的形态。

此外，使用(22.2)与(22.3)还能求得 Whittaker 函数的渐近展开式。首先对 $M_{\varkappa,\mu}(z)$ 中的 F，把 F 的渐近展开的初项代入，就有

$$M_{\varkappa,\mu}(z)\sim e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{1}{2}+\mu}\left[e^{\pi i\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\varkappa+\frac{1}{2}\right)}z^{-\mu+\varkappa-\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}e^{z}z^{-\mu-\varkappa-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\Gamma(2\mu+1)\left[\frac{e^{\pi i\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\mu+\varkappa+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\varkappa}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{z}{2}}z^{-\varkappa}\right],$$

$$-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}. \tag{22.4}$$

于是有

$$\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\varkappa\right)}M_{\varkappa,\mu}(z)\sim-\frac{\cos\pi(\mu+\varkappa)}{\sin 2\pi\mu}e^{\pi i\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\varkappa}$$

$$-\frac{\pi}{\sin 2\pi\mu\,\Gamma\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{z}{2}}z^{-\varkappa}.$$

由于右边的第二项是 μ 的奇函数，所以根据(20.10)来作 $W_{\varkappa,\mu}(z)$ 时，两个第二项相互抵消，即 $W_{\varkappa,\mu}(z)$ 的渐近展开的主项与 $e^{-\frac{z}{2}}z^{\varkappa}$ 成比例，比例系数是

$$\frac{1}{\sin 2\pi\mu}\left\{\cos\pi(\mu+\varkappa)e^{\pi i\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}+\cos\pi(\mu+\varkappa)e^{\pi i\left(-\mu-\varkappa+\frac{1}{2}\right)}\right\},$$

于是它的大小实际是 1，所以最后得到[5]

$$W_{\varkappa,\mu}(z)\sim e^{-\frac{z}{2}}z^{\varkappa}. \tag{22.5}$$

方程 (20.2) 的两个解，使用了 G_1 与 G_2 后，可以認为是

$$e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}G_1\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ z\right)$$

与

$$e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}G_2\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ z\right),$$

由于后者的漸近形态是函数 $e^{\frac{z}{2}}z^{-\varkappa}$，所以 $W_{\varkappa,\mu}(z)$ 必定与前者成比例。利用两个函数的漸近形式决定了系数之后，就得关系式

$$W_{\varkappa,\mu}(z)=\frac{\Gamma\left(\mu+\varkappa+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2\mu+1)}e^{\pi i\left(-\mu+\varkappa-\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}$$
$$\times G_1\left(\mu-\varkappa+\frac{1}{2};\ 2\mu+1;\ z\right),\quad |\arg z|<\pi. \tag{22.6}$$

§23 几 个 公 式

在所講过的一些超几何函数的公式中，使用由超几何函数导出合流型超几何函数的极限操作，即先令 $z\to\frac{z}{\beta}$，$\frac{d}{dz}\to\beta\frac{d}{dz}$，然后令 $\beta\to\infty$，就能直接导出合流型超几何函数所对应的公式。

譬如与(14.7)对应地有下面这样与 β 无关的公式：

$$\gamma F(\alpha;\gamma;z)-(\gamma-\alpha)F(\alpha;\gamma+1;z)$$
$$-\alpha F(\alpha+1;\gamma+1;z)=0, \tag{23.1}$$

公式的証法自明。

下面列举几个重要的公式。

(1) 在(13.3)中以 z/β 代替 z 有

$$F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{\beta}\right)=\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{-\beta}F\left\{\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{\beta}\Big/\left(\frac{z}{\beta}-1\right)\right\},$$

由这个公式,能够导出

$$F(\alpha;\gamma;z)=e^{z}F(\gamma-\alpha;\gamma;-z). \tag{23.2}$$

这个公式也能由(21.8)或(21.9)用代换 $s=1-t$ 得出。

(2) 微分公式对于超几何函数的微分公式(14.9)

$$\frac{d}{d(z/\beta)}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{\beta}\right)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;\frac{z}{\beta}\right),$$

除以 β,然后令 $\beta\to\infty$,就得到

$$\frac{d}{dz}F(\alpha;\gamma;z)=\frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1;\gamma+1;z). \tag{23.3}$$

当然,这个公式也能由积分表示的級数展开式經直接微分后导出。

(3) 递推公式[3]对于 $F(\alpha;\gamma;z)$ 的 α 及 γ,使它們分别增减 1 的运算子 $\overset{(\alpha)}{T}$, $\underset{(\alpha)}{T}$, $\overset{(\gamma)}{T}$, $\underset{(\gamma)}{T}$ 可以直接地写出如下:

$$\overset{(\alpha)}{T}=1+\frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}=\frac{1}{\alpha}z^{-(\alpha-1)}\frac{d}{dz}[z^{\alpha}.$$

$$\underset{(\alpha)}{T}=1+\frac{z}{\alpha-\gamma}\left(1-\frac{d}{dz}\right)=\frac{1}{\alpha-\gamma}e^{z}z^{\alpha+1-\gamma}\frac{d}{dz}[e^{-z}z^{\gamma-\alpha}.$$

$$\overset{(\gamma)}{T}=\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(\frac{d}{dz}-1\right)=\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}e^{z}\frac{d}{dz}[e^{-z}.$$

$$\underset{(\gamma)}{T}=1+\frac{z}{\gamma-1}\frac{d}{dz}=\frac{1}{\gamma-1}z^{2-\gamma}\frac{d}{dz}[z^{\gamma-1}. \tag{23.4}$$

自然可以接連地使用右边的公式,而得到下面这样形式的运算子,如

$$\overset{(\gamma+1)}{T}\overset{(\gamma)}{T}=\frac{\gamma+1}{\alpha-\gamma-1}\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}e^{z}\frac{d^{2}}{dz^{2}}[e^{-z}.$$

§24 Laguerre 方程与 Laguerre 多项式

1. Laguerre 方程 在§1所述說的合流型方程的特殊情形

中，最簡单的一种就是$\gamma=1$的情形。这时，通常把α取成$-\nu$，就得到下面的所謂 Laguerre 方程：

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(1-z)\frac{dw}{dz}+\nu w=0. \tag{24.1}$$

它的一个解

$$L_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)F(-\nu;1;z) \tag{24.2}$$

叫做 Laguerre 函数（另一个解可以参照(20.6)）。

对(24.1)施行m次微分后，得

$$z\frac{d^{m+2}w}{dz^{m+2}}+(m+1-z)\frac{d^{m+1}w}{dz^{m+1}}+(\nu-m)\frac{d^mw}{dz^m}=0. \tag{24.3}$$

由此就能知道，下面的函数

$$\begin{aligned}L_\nu^{(m)}(z)&=\frac{d^m}{dz^m}L_\nu(z)\\&=\frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+m-1)}{1\cdot2\cdots m}\Gamma(\nu+1)F(-\nu+m;m+1;z)\\&=\frac{(-1)^m[\Gamma(\nu+1)]^2}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu-m+1)}F(-\nu+m;m+1;z)\end{aligned} \tag{24.4}$$

就是所謂陪 Laguerre 方程

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(m+1-z)\frac{dw}{dz}+(\nu-m)w=0 \tag{24.5}$$

的解。陪 Laguerre 方程显然就是在方程(20.1)中，令$\gamma=m+1$（或$\alpha=-\nu+m$）的情形。函数$L_\nu^{(m)}$叫做陪 Laguerre 函数❶。

2. Laguerre 多項式　如果在$L_\nu^{(m)}(z)$中，ν是不小于m的整

---

❶ 現在很流行的一种写法，以

$$L_\nu^{(\mu)}(z)=\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}F(-\nu;\mu+1;z) \tag{24.6}$$

作为一般化后的陪 Laguerre 函数（如果ν与μ是任意的数，則它实际就是合流型超几何函数）。所以我們在閱讀文献时，一定要注意到各种記号的使用法。(24.5)的定义，因为直接与微分后的方程联系着，所以比較直观。注意到本节的3.中的討論，我們把(24.6)右边的函数称为 Sonine 函数，記作$S_\nu^\mu(z)$。

数，即 $\nu=n\geqslant m$，这时，相当于 $F(\alpha;\gamma;z)$ 中 α 是负整数 $(-n+m)$ 的情形，从而(24.2)与(24.4)只能到有限项截止，而成为 $(n-m)$ 次的多项式。这与超几何函数退化成为 Jacobi 多项式的情形完全一致。

首先在 Laguerre 函数(24.2)中，令 $\nu=n$，由 (20.4) 就得到了 n 次的多项式

$$L_n(z)=n!\Big[1-\frac{n}{1}\cdot\frac{z}{1}+\frac{n(n-1)}{2!2!}z^2+\cdots+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2}z^k+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}z^n\Big].\quad(24.7)$$

这个多项式叫做 Laguerre 多项式。

下面举几个例，如对于 $n=0,1,2,\cdots$ 等有

$$L_0(z)=1,\quad L_1(z)=1-z,\quad L_2(z)=2-4z+z^2,$$
$$L_3(z)=6-18z+9z^2-z^3.$$

把上列的多项式逐项微分后，就容易得到属于 $\nu=n$ 情形的陪 Laguerre 多项式

$$L_1^{(1)}(z)=-1,\quad L_2^{(1)}=-4+2z,\quad L_2^{(2)}(z)=2,$$
$$L_3^{(1)}=-18+18z-3z^2,\ L_3^{(2)}(z)=18-6z,\ L_3^{(3)}(z)=-6,\ \cdots.$$

一般由于 $L_\nu^{(m)}(z)\propto F(-\nu+m;\ m+1;z)$，所以根据(21.15)或渐近展开式 (22.3) 就知道当 $z\to\infty$ 时，$L_\nu^{(m)}(z)$ 包含有相似于指数函数形态的 G_2。但是当 $\nu=n\geqslant m$ 时，$G_2=0$，并且 $\frac{1}{2}G_1$ 只截到有限项为止，所以这样就能得到 $L_n^{(m)}(z)$ 的正确表示。譬如对于 $L_n(z)$，我們能够有公式

$$\frac{1}{2}G_1(-n;1;z)=\frac{(-1)^n}{n!}z^n\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(-n)(-n+1)\cdots(-n+m-1)}{z^m}$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!(-1)^{n-m}}{[(n-m)!]^2m!}z^{n-m}=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!(-z)^r}{(r!)^2(n-r)!}=\frac{1}{n!}L_n(z).$$

3. Sonine 多项式 与由超几何級数导出 Jacobi 多项式的

情形完全相同，要使合流型超几何級数 $F(\alpha;\gamma;z)$ 截止到有限項为止而成为多項式，必需設 α 是負的整数，这时 γ 不一定非是整数不可，这样所得到的一般多項式，即

$$\begin{aligned} S_n^\mu(z) &= \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(n+1)} F(-n;\mu+1;z) \\ &= \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu+1)}\left[1-\frac{n}{\mu+1}\cdot\frac{z}{1}\right. \\ &\quad \left. +\frac{n(n-1)}{(\mu+1)(\mu+2)}\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{(-z)^n}{(\mu+1)_n}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\mu}{n-k}\frac{(-z)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{24.8}$$

这个多項式叫做 Sonine 多项式，也可以叫做广义的陪 Laguerre 多項式❶。

$S_n^\mu(z)$ 是 z 的 n 次多項式。如 μ 是整数，則它与在2中所説的狭义的陪 Laguerre 多項式本质上是相同的，即有

$$S_n^m(z)=\frac{(-1)^n}{(n+m)!}L_{n+m}^{(m)}(z). \tag{24.9}$$

相反，成立着下面的关系

$$L_n^{(m)}(z)=(-1)^m n!\,S_{n-m}^m(z). \tag{24.10}$$

現在举几个例子如下。当 $n=0,1,2,\cdots$ 时，有

$$S_0^\mu(z)=1,\qquad S_1^\mu(z)=\mu+1-z,$$

$$S_2^\mu(z)=\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}\left[1-\frac{2z}{\mu+1}+\frac{z^2}{(\mu+1)(\mu+2)}\right],$$

$$S_n^\mu(0)=\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu+1)},\qquad S_n^{-n}(z)=(-1)^n\frac{z^n}{n!}.$$

参照了 Jacobi 多項式的定义(15.1)，由(20.1)与(24.8)，就能由 $\mathscr{J}_n(\alpha;\gamma;z)$ 导出 $S_n^\mu(z)$，即

❶ 这种函数的写法，各家不同，有的作者把 $S_n^\mu(z)$ 写作 $S_\mu^n(z)$。

$$S_n^\mu(z)=\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu+1)}\lim_{\alpha\to\infty}\mathscr{J}_n\left(\alpha;\mu+1;\frac{z}{\alpha}\right). \tag{24.11}$$

使用这个关系，能够导出下面的一些性质。

(1) 微分表示在 $\mathscr{J}_n(\alpha;\gamma;z)$ 的微分表示 (15.2) 中，把 (24.11) 代入，就有

$$S_n^\mu(z)=\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!\,\Gamma(\mu+1)}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{z^{-\mu}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\mu+1-\alpha}}{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}$$

$$\times\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu+n}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\alpha+n-\mu-1}\right].$$

此外，再考虑到 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\pm\alpha}=e^{\mp z}$ 后，就得

$$S_n^\mu(z)=\frac{e^z z^{-\mu}}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^{\mu+n}). \tag{24.12}$$

对于 Laguerre 多项式，根据(24.10)有

$$L_n(z)=n!\,S_n^0(z)=e^z\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n), \tag{24.13}$$

$$L_n^{(m)}(z)=\frac{d^m}{dz^m}\left[e^z\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n)\right]$$

$$=(-1)^m n!\,S_{n-m}^m(z)=\frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}e^z z^{-m}\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}(e^{-z}z^n). \tag{24.14}$$

根据这些微分表示，就能知道，如 μ 是正的实数，则方程 $S_n^\mu(z)=0$ 具有 n 个正的相异实根。

(2) 正交关系在 Jacobi 多项式的正交关系式 (15.9) 中，令 $z=\frac{z}{\alpha}$，$\gamma=\mu+1$，并令 $\alpha\to\infty$，即可得出正交公式。这时，对于 $\mathscr{J}_m=\mathscr{J}_m\left(\alpha;\mu+1;\frac{z}{\alpha}\right)$，在 $\mu>-1$ 的条件下，(15.9) 成为

$$\left[\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!\Gamma(\mu+1)}\right]^2\int_0^\alpha z^\mu\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\alpha-\mu-1}\mathscr{J}_m\mathscr{J}_n dz$$

$$=\begin{cases}\alpha^{\mu+1}\dfrac{\Gamma(n+\mu)\cdot\Gamma(\alpha-\mu+n)}{\Gamma(\alpha+n)n!\Gamma(\alpha+2n)}, & (m=n),\\ 0 & (m\neq n).\end{cases}$$

当 $\alpha\to\infty$ 时，根据 Stirling 公式，$\Gamma(\alpha+p)=\sqrt{\pi}\,\alpha^{\alpha+p-\frac{1}{2}}e^{-\alpha}\left[1+o\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]$，作了这种极限运算以后(再把 z 写成 x)，就得

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x}S_n^\mu(x)S_m^\mu(x)dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!}, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}\quad \mathrm{Re}\mu>-1 \tag{24.15}$$

自然，上面的公式完全可以象在 Jacobi 多项式的情形中一样，由(24.12)用分部积分法导出。

由(24.15)，引用 $L_n(z)=n!S_n^0(z)$，与 $L_n^m(z)=(-1)^m n!S_{n-m}^m(z)$ 等关系，就能得到下面的公式

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_p(x)dx=(n!)^2\delta_{np},\\ &\int_0^\infty x^m e^{-x}L_n^{(m)}(x)L_p^{(m)}(x)dx=\frac{(n!)^3}{(n-m)!}\delta_{np}.\end{aligned} \tag{24.16}$$

这个公式在实际中有用处，譬如 Enskog, Chapmann, Cowling 等人在研究气体运动理論中的速度分布函数 $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ 时($\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}$ 是分子的位置与速度，t 是时間)，曾以 Maxwell 分布函数 $f_0\propto e^{-\alpha(v-v_0)^2}$ 作为 Boltzmann 微积方程的第0次近次解，然后逐次近似地求得解，这实际就是假設了解为 $f_0S_n^\mu(\alpha(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)^2)$ (μ 是奇数之半)的級数展开的形式，并使用了上面所說的正交性而求出的。

(3) 母函数　在(21.4)中，设 $s=-t/(1-t)$，$\alpha=-n$，$\gamma=\mu+1$，并以原点为中心的小圆作为积分路线，考虑沿着这条路线变动一周的积分

$$w=\frac{n!}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{G(t,z)}{t^{n+1}}dt,\quad G(t,z)=\frac{e^{-zt/(1-t)}}{(1-t)^{\mu+1}},\qquad (24.17)$$

由于积分路线满足条件(21.7)，所以(24.17)就是 Sonine 微分方程

$$zw''+(\mu+1-z)w'+nw=0$$

的解。但是因为这个解在 $z=0$ 处是正则的，所以它等于 $S_n^\mu(z)$ 乘以一个适当的常数⑦。另一方面，由于 Goursat 定理⑧，对于在圆内的 t 的正则函数 $G(z,t)$，(24.17)实际就是 $G(z,t)$ 在 $t=0$ 处的 n 阶导函数，$\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n}G\right)_{t=0}$，即

$$w=\left(\frac{\partial^n G}{\partial t^n}\right)_{t=0}=A_nS_n^\mu(z),\quad A_n\text{ 为常数。}$$

由于 $z=0$ 时，$G(t,0)=(1-t)^{-(\mu+1)}$，$S_n^\mu(0)=\Gamma(n+\mu+1)/[n!\Gamma(\mu+1)]$，将此代入上式，就得 $A_n=n!$，即在 $t=0$ 的近傍，作 $G(z,t)$ 的幂级数展开式，有

$$G(z,t)=\frac{e^{-zt/(1-t)}}{(1-t)^{\mu+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n G}{\partial t^n}\right)_{t=0}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_n^\mu(z)t^n,$$

$$|t|<1,\qquad (24.18)$$

这里的 t^n 的系数就是 $S_n^\mu(z)$。参照球函数的情形，可知 $G(z,t)$ 实际就是 $S_n^\mu(z)$ 的母函数。

(4) 递推公式　将(24.18)对 z 微分，有

$$-\frac{t}{1-t}G(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}S_n^\mu(z)t^n,$$

乘以 $t-1$，并比较两边的 t^{n+1} 项，则得

$$S_n^\mu(z)=\frac{d}{dz}S_n^\mu(z)-\frac{d}{dz}S_{n+1}^\mu(z).\qquad (24.19)$$

如果把(24.18)对 t 微分(然后比較 t^{n-1} 項的系数),則能得到

$$nS_n^\mu(z)=(-z+2n+\mu-1)S_{n-1}^\mu(z)-(n+\mu-1)S_{n-2}^\mu(z).\quad(24.20)$$

$\overset{(n)}{T}=\frac{1}{n+1}\left(n+\mu+1-z+z\frac{d}{dz}\right)$是使 n 增加1,$\underset{(n)}{T}=\frac{n}{n+\mu}\left(1-\frac{z}{n}\frac{d}{dz}\right)$

是使 n 减少1的运算子,并且能証明 $\underset{(n+1)}{T}\overset{(n)}{T}L_n^\mu=L_n^\mu$。自然以上的結果都能直接由(23.4)式以及 $S_n^\mu(z)$ 的定义式(24.8)导出。

例　使用(23.4),有

$$\overset{(-n)}{T}F(-n;\mu+1;z)=\left(1-\frac{z}{n}\frac{d}{dz}\right)F(-n;\mu+1;z)$$

$$=F(-n+1;\mu+1;z).$$

这个公式利用(24.8)改换一下写法,就得到了与 $\underset{(n)}{T}$ 相当的公式

$$\frac{n}{n+\mu}\left(1-\frac{z}{n}\frac{d}{dz}\right)S_n^\mu(z)=S_{n-1}^\mu(z).\quad(24.21)$$

4. 氫原子波函数[13]　关于氫原子的 Schrödinger 方程,根据§5及§17中所述,对极坐标使用变数分离法以后,有形如 $R(r)Y_l(\theta,\varphi)$ 的解,这里依賴于半徑 r 的波函数 $R(r)$ 滿足方程

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(E_1+\frac{2Z}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0,$$

$$E_1=\frac{2mE}{\hbar^2},\qquad z=\frac{me^2}{\hbar^2}\quad(24.22)$$

(这里 E 表示的是全能量, $2Z/r$ 是庫倫位能), $l(l+1)$ 叫做分离常数, l 取0,1,2,…各整数值。由于(24.22)具有(9.2)的形状,所以令

$$R(r)=e^{-kr}r^lw(z),\quad z=2kr,\quad k=\sqrt{-E_1}=\sqrt{-2mE}/\hbar\quad(24.23)$$

后,就得 w 所滿足的微分方程为

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(2l+2-z)\frac{dw}{dz}+\left(\frac{Z}{k}-l-1\right)w=0.\quad(24.24)$$

这个方程是合流型超几何方程。它的两个独立的解,一个是在原点

处正则的解 $F(l+1-Z/k;\ 2l+2;\ z)\propto L_{Z/k+l}^{2l+1}(z)$，另一个是在原点处与 z^{-2l-1} 成比例，而以原点为奇异点（含有对数项）的第二个解。

现在考虑当 $E<0$，并且 k 是实数（即束缚状态）的情形。首先由于 $R(r)$ 在原点是有限的，所以不允許使用第二个解。当 $r\to\infty$ 时，F 一般和 $e^z\sim e^{2kr}$ 成比例，并且 $R(r)$ 与 e^{kr} 成比例地按指数式关系无限增大。因此如果要求 $R(r)$ 当 $r\to\infty$ 时的极限趋于 0，那么 F 非截止到有限項为止不可，从而必定归結成为多項式（即陪 Laguerre 多項式）的情形，因而限定 $Z/k=z/\sqrt{-E_1}$ 的值必須是比 l 为大的整数 n，$n=l+1,\ l+2,\ \cdots$，于是 $w\propto L_{n+l}^{(2l+1)}(z)$。把这个函数代入到(24.23)，就可得到作为方程(24.22)的固有函数，束縛状态的氫原子的波函数，即

$$R(r)=R_{nl}(2kr),\quad R_{nl}(z)=e^{-\frac{z}{2}}z^lL_{n+l}^{(2l+1)}(z),$$

$$k=\frac{Z}{n},\quad n=l+1,l+2,\quad \cdots. \tag{24.25}$$

設对于函数 $R_{nl}(2kr)$ 的方程 (24.22)，其中 $E_1=-k^2$，乘以函数 $r^2R_{nl}(2k_1r)$，另外使这个方程减去在其中把 n 及 n_1（即 k 及 k_1）交換了以后的方程，然后对差由 0 到∞积分，这样就导出了对于相同的 l，但是不同 n 的 R_{nl} 的正交关系式

$$\int_0^\infty R_{nl}(2kr)R_{n_1l}(2k_1r)r^2dr=0,\quad n\neq n_1,$$

$$k=\frac{Z}{n},\quad k_1=\frac{Z}{n_1}. \tag{24.26}$$

这个关系显然是方程的固有函数所应該满足的[10]。

又利用(24.20) 及 (24.16) 能够証明下列的正規化积分公式，即

$$\int_0^\infty[R_{nl}(2kr)]^2r^2dr=\frac{n[(n+l)!]^3}{4k^3(n-l-1)!}. \tag{24.27}$$

如果 E 是正的，而 k 是純虚数 ik，由于这时 $z=2ikr$，所以方程在原点处为有限的解(24.23)是 $e^{-ikr}r^l\cdot F(l+1+iZ/k;\ 2l+2;\ 2ikr)$，而当 $r\to\infty$，对于任意的 k，这个解为有限的，并且根据(22.1)及(22.2)具有

$$r^{-1}\sin\left[kr+\frac{Z}{k}\log(2kr)-\eta(l,k)\right]$$

的形状。另外，对于第二种解，由于当 $r\to\infty$ 时，仅仅相角发生了 $\frac{\pi}{2}$ 的位移，所以可以表示成为余弦函数。

此外，当 $k=0$ 时，利用(24.23)的写法换算后，能够用下一章中所說的 Bessel 函数来表示 $R(r)$，即 $R(r)=r^{-\frac{1}{2}}\ J_{\pm(2l+1)}\ (2\sqrt{2Zz})$。

当 $E>0$ 时，使用回轉拋物面坐标比用极坐标为便利，这样的解能够表示成为位数是虚数的 Laguerre 函数，即参照了(5.17)与(5.18)后，有如下的 Schrödinger 方程：

$$\left(\Delta+k^2+\frac{4Z}{\xi^2+\eta^2}\right)\Psi=0,$$

$$\Delta=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{\xi^2\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\qquad(24.28)$$

(注意 $\xi^2+\eta^2=2r$)，如令 $\Psi=\Xi(\xi)\ H(\eta)\,e^{im\varphi}$，并分离变数，则 Ξ，H 归結成下列方程之解

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d\Xi}{d\xi}+\left(k^2\xi^2-\frac{m^2}{\xi^2}+2Z+\lambda\right)\Xi=0,\\&\frac{d^2H}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{dH}{d\eta}+\left(k^2\eta^2-\frac{m^2}{\eta^2}+2Z-\lambda\right)H=0\end{aligned}\qquad(24.29)$$

这些方程本質上是与(5.18)一致的。

此外，如果令 $z=\frac{1}{2}\xi^2$，或是等于 $\frac{1}{2}\eta^2$，那么 Ξ，H 就是由方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(k^2+\frac{Z_1}{z}-\frac{m^2}{4z^2}\right)w=0,\quad Z_1=Z\pm\frac{\lambda}{2}\qquad(24.30)$$

的解所决定的。容易証明上面的方程具有下面的两个独立解

$$w=z^{\frac{m}{2}}e^{\pm ikz}F\left(-\frac{iZ_1}{2k}+\frac{m+1}{2};\ m+1;\ \mp 2ikz\right)$$

$$\propto z^{\frac{m}{2}}\,e^{\pm ikz}L_\nu^{(m)}(\mp 2ikz)\ \propto z^{\frac{m}{2}}e^{\pm ikz}S_{\nu-m}^{m}\ (\pm 2ikz),\qquad(24.31)$$

这里

$$\nu=\frac{iZ_1}{2k}+\frac{m}{2}.$$

§25 抛物柱波动函数与 Hermite 多项式

1. 抛物柱函数[1] 抛物柱波动函数(6.30)满足 Weber 微分方程

$$\frac{d^2}{dz^2}w+(\lambda-z^2)w=0. \tag{25.1}$$

現在討論一下函数当 $z\to\infty$ 时的情形。首先令

$$w=e^{-\frac{z^2}{2}}v(z), \tag{25.2}$$

則 v 满足方程

$$\frac{d^2}{dz^2}v-2z\frac{dv}{dz}+2\nu v=0,\quad \nu=\frac{\lambda-1}{2}, \tag{25.3}$$

这个方程叫做 Hermite 方程。

如果变换独立变数，即令 $z^2=t$，并考虑关系 $d/dz=2\sqrt{t}\,d/dt$，就可得

$$t\frac{d^2}{dt^2}v+\left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{d}{dt}v+\frac{\nu}{2}v=0. \tag{25.4}$$

这也是合流型的微分方程，并据(20.2)及(20.3)，它的两个解可以表示成为

$$v_1(t)=F\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ t\right)=F\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right), \tag{25.5}$$

$$v_2(t)=t^{\frac{1}{2}}F\left(-\frac{\nu+1}{2};\ \frac{3}{2};\ t\right)=zF\left(\frac{1-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right). \tag{25.6}$$

为了适用于討論 $z\to\infty$ 的情形，可以把(25.1)的基本解取成与(20.3)或(20.4)相当的

$$D_\nu(\sqrt{2}z)=2^{\nu/2}e^{-\frac{z^2}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}v_1+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)}v_2\right]$$

$$=2^{\frac{\nu}{2}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2},-\frac{1}{4}}(z^2) \tag{25.7}$$

及 $D_\nu(-\sqrt{2}z)$，或是 $D_{-\nu-1}(i\sqrt{2}z)$ 及 $D_{-\nu-1}(-i\sqrt{2}z)$，而把这些函数称之为抛物柱函数，利用(22.2)及(22.3)以及(22.6)，能够証明 $D_\nu(z)$ 具有下列的漸近展开式

$$D_\nu(z)\sim e^{-\frac{z^2}{4}}z^\nu\left(1-\frac{\nu(\nu-1)}{2z^2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot 4z^4}+\cdots\right),$$

$$|\arg z|<\frac{3\pi}{4}. \tag{25.8}$$

2. Hermite 多項式[2] (1)　函数(25.5)及(25.6)关于变数 z 都是在 $z=0$ 处的正則函数，并且根据(22.3)，当 $z\to\infty$ 时，它們的形态都近似于 e^{z^2}，因此 w 在无限远的値趋于无限大。为了避免函数在无限远处发散得太快，可以設 F 为多項式。卽在(25.5)中取 ν 是偶数 $2m$，而在(25.6)中取 ν 为奇数 $2n+1$ 的情形。这样得到的多項式，乘以一个适当的常数后，有

$$H_{2n}(z)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}F\left(-n;\frac{1}{2};z^2\right)$$

$$=(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}S_n^{-\frac{1}{2}}(z^2), \tag{25.9}$$

$$H_{2n+1}(z)=2(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}zF\left(-n;\frac{3}{2};z^2\right)$$

$$=(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}zS_n^{\frac{1}{2}}(z^2), \tag{25.10}$$

叫做 Hermite 多項式。两者都是 Sonine 多項式的特殊情形，而分别与 $S_n^{-\frac{1}{2}}(z^2)$ 及 $zS_n^{\frac{1}{2}}(z^2)$ 成比例。这一点可以由(24.8)而容易得到。此外，当 $n=0,1,2,3,4,$ 时分别有

$$H_0(z)=1,\quad H_1(z)=2z,\quad H_2(z)=4z^2-2,$$
$$H_3(z)=8z^3-12z,\quad H_4(z)=16z^4-48z^2+12,\cdots,$$

一般有

$$H_n(z)=(2z)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2z)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2z)^{n-4}-\cdots.$$

(2) 微分表示　考虑(24.12)后，为了要作出 $w_n=e^{-z^2}H_n$ 所满足的微分方程，可以把 $H_n=e^{z^2}w_n$ 代入方程(25.1)之內，而得

$$w_n''+2zw_n'+(2n+2)w_n=0.$$

这个方程显然就是对 $w_0=Ae^{-z^2}+(Be^{-z^2}\int_0^z e^{z^2}dz)$ 所滿足的微分方程

$$w_0''+2zw_0'+2w_0=0$$

連作了 n 次微分后，再令 $w_0^{(n)}=w_n$ 所得到的結果。这也就是說，方程的解是 $w_0^{(n)}$. 再考虑当 $z\to\infty$ 时，H_n 是多項式的条件，而定出常数 A_n，(B_n 可設为 0)，于是一定能得到下面的关系式

$$H_n(z)=e^{z^2}w_n=A_ne^{z^2}w_0^{(n)}=A_ne^{z^2}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\ e^{-z^2}.$$

把微分后的結果与(25.9)，(25.10) 对比，而比較 z^n 的系数(或是常数項)，就能証明 A_n 等于 $(-1)^n$. 即

$$H_n(z)=(-1)^ne^{z^2}\cdot\frac{d^n}{dz^n}\cdot(e^{-z^2})=e^{z^2}\cdot\frac{\partial^n}{\partial t^n}\ [e^{-(t-z)^2}]_{t=0}. \quad (25.11)$$

(3) 母函数　对(25.11)乘以 $t^n/n!$，并使 $n=0$ 到 ∞ 的各項相加，則得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}t^n=e^{z^2-(t-z)^2}=e^{2tz-t^2}, \quad (25.12)$$

这个公式显示出 $\exp(2tz-z^2)$ 是 $H_n(z)$ 的母函数。

(4) 递推公式　将母函数对 z 微分，比較 t^n 的系数，就有

$$H_n'(z)=2nH_{n-1}(z). \quad (25.13)$$

如果对 t 微分，那么由下列公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{(n-1)!}t^n=2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}\ t^n-2t\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}\ t^n,$$

就有

$$2zH_n(z)=2nH_{n-1}(z)+H_{n+1}(z). \tag{25.14}$$

把(25.13)代入上式后，就有关系式

$$\left(2z-\frac{d}{dz}\right)H_n(z)=H_{n+1}(z). \tag{25.15}$$

(5) 正交关系式 在(25.11)的两边乘以$z^m e^{-z^2}(m\leqslant n)$，对$z$由$-\infty$到$+\infty$积分，并施以分部积分，就有

$$[z^m,H_n(z)]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}H_n(z)z^m dz=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}z^m\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2})dz$$

$$=\cdots=(-1)^{n+m}m!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}(e^{-z^2})dz,$$

如果$n>m$，则最后的积分值为0，由此看出了$H_n(z)$与次数为m以下的多项式的正交性。又当$n=m$时，利用公式$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$，就得

$$[z^n,H_n(z)]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}H_n(z)z^n dz=n!\sqrt{\pi}. \tag{25.16}$$

利用这两个結果，并且考虑到$H_m(z)=(2z)^m+$低次多项式，就得到了Hermite多项式的正交关系式

$$[H_m(z),H_n(z)]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}H_m(z)H_n(z)dz=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{m,n}. \tag{25.17}$$

利用Sonine多项式的性質也能导出上面的关系，这里留作习題請讀者自己考虑。

例 一維調和振动子的Schrödinger方程可以写成

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\Psi=E\Psi. \tag{25.18}$$

这里E是全能量，ω是角振动数。令$x=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,z$，则得

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2}+\left(\frac{2E}{\hbar\omega}-z^2\right)\Psi=0. \tag{25.19}$$

这个方程恰好就是方程(25.1)。参照(25.2)以下各公式，就知道，除去

$2E/(\hbar\omega)=\lambda=2\nu+1$ (即是奇数)的情形,也就是說, E 取固有值

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{25.20}$$

的情形以外,方程不可能具有当 $z\to\pm\infty$ 时与 $e^{z^2}\cdot e^{-z^2/2}=e^{z^2/2}$ 成比例发散的解。对应于固有值(25.20)的固有函数是

$$\Psi_n=C_n e^{-\frac{z^2}{2}}H_n(z). \tag{25.21}$$

如果令 C_n 滿足正規化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi_n|^2dx=1, \tag{25.22}$$

則根据(25.17)就得到 C_n 的值为

$$C_n=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}(n!)^{\frac{1}{2}}}. \tag{25.23}$$

对于次数不同的固有函数具有正交关系,这种关系表現成为量子力学中重要的迁移概率

$$(n|x|p)=\int_{-\infty}^{\infty}x\Psi_n(z)\Psi_p(z)\,dx \tag{25.24}$$

积分的值可以利用(25.14),設 $xH_n=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(nH_{n-1}+\frac{1}{2}H_{n+1}\right)$,并参照(25.23),(25.17)而求出如下,即如 $p\neq n\pm1$ 时,积分都为 0, 对于 $p=n\pm1$ 的情形,能得到

$$(n-1|x|n)=(n|x|n-1)=\sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}. \tag{25.25}$$

第6章　圓柱函数

利用圓柱坐标写出的 Helmholtz 方程是

$$(\varDelta+\varkappa)\varPsi=\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\varkappa\right]\varPsi=0, \quad (1)$$

令 $\varPsi=R(r)e^{\pm i\nu\varphi\pm ihz}$，并代入上面的方程后，就得到了 $R(r)$ 所滿足的方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\left(\varkappa-h^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\right]R(r)=0, \quad (2)$$

这样就能看到，角部分以及 z 部分的函数可以用三角函数或是指数函数来描述，但是函数 $R(r)$ 就需要用 Bessel 函数描述。

对回轉拋物面坐标系的 Laplace 方程，用变量分离法处理后，也能归結成为这样的形式（参照 (6.19)，(24.28)）①。

§26　Bessel 方程与它的解

1．Bessel 方程　Bessel 函数是归属于合流型超几何函数中的最有用的函数。我們可以把它定义为，在 (2) 中令 $\sqrt{\varkappa-h^2}\,r=z$; $R(r)=w(z)$ 所得的微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0 \quad (26.1)$$

之解。

方程 (26.1) 就是在方程 (9.2) 中，令 $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$, $e=-\nu^2$ 的結果。如令 $w=z^\nu e^{-iz}v(z)$，則得合流型微分方程 $(p=-i,\ q=\nu)$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left[-2i+\frac{2\nu+1}{z}\right]\frac{dv}{dz}-\frac{i(2\nu+1)}{z}v=0. \quad (26.2)$$

这个方程具有两个独立的解，为 $F\left(\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ 2iz\right)$ 及 $z^{-2\nu}F\left(-\nu+\frac{1}{2};-2\nu+1;2iz\right)$. 适当地选择了系数后，可以用公式

$$J_\nu(z)=\frac{z^\nu e^{-iz}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}F\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2iz\right)$$

$$=\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2^\nu(2i)^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)}M_{0,\nu}(2iz) \qquad (26.3)$$

来规定函数 $J_\nu(z)$，这个定义仅当 $\nu\neq$ 負整数时有效，并且 $J_\nu(t)$ 是方程(26.2)在原点近傍与 $\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$ 成比例的解。此外，如果 $\nu\neq$ 整数时，方程 (26.1) 的一般解可以写成

$$w=C_1J_\nu(z)+C_2J_{-\nu}(z). \qquad (26.4)$$

函数 $J_\nu(z)$ 叫做 ν 次的第一种 Bessel 函数。

2. Poisson 型的积分表示

(1) 根据 (21.2) 以及前一节的結果，就有

$$w=A'z^\nu e^{-iz}\int s^{\nu-\frac{1}{2}}(1-s)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{2izs}ds,$$

又施以变数变换 $s=(1+t)/2$ 后，就得到

$$w(z)=A''z^\nu\int_c(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{izt}dt, \qquad (26.5)$$

而(21.7)式現在成为积分路綫 C 所满足的条件

$$(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}e^{i(1+t)z}\Big|_c=0. \qquad (26.6)$$

适当地选取积分路綫 C 以及常数 A''，就能导出函数 $J_\nu(z)$ 与 $J_{-\nu}(z)$.

(2) 第一种圆柱函数以及它的級数展开

考虑图 26.1 与 26.2 中的积分路綫 c_1 与 c_2，它們都满足条件(26.6)。只要規定在 P_1 与 P_2 处有約束条件 $\arg(t-1)=0$ 及

$\arg(t+1)=0$ 卽可。此外,对于路綫 c_2, 如果令 $\theta=\arg z$, 那么必須取积分路綫伸延到∞的方向 α, 使得 $0<\alpha+\theta<\pi$, $(\mathrm{Re}(izt)<0)$.

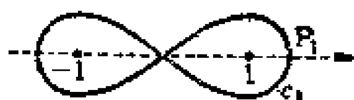


图 26.1

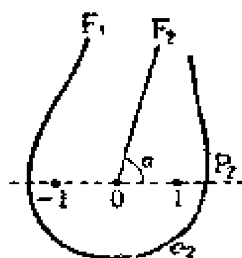


图 26.2

要滿足这些条件可以令在无限远点 F_2 处,有 $\arg(t-1)$, $\arg(t+1)$ $=-\theta-\frac{\pi}{2}$(幅角允許在 $\pm\frac{\pi}{2}$ 間变动[2])卽可。故此对于 c_1, 可限制以条件 $|\arg z|<\pi$, 而来考虑积分

$$w_1(z)=A_1 z^\nu \oint_{c_1} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt. \tag{26.7}$$

首先和討論球函数时的情形一样,把积分路綫取成实数軸,令 $t=\cos\theta$, 对 $\nu+\frac{1}{2}>0$[3] 的情形,得到下面的关系[4]

$$w_1(z)=2iA_1 z^\nu \sin\pi\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\int_{-1}^{1} e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt,$$

$$\nu+\frac{1}{2}>0,$$

$$=\frac{2\pi i A_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} z^\nu \int_0^\pi e^{iz\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\, d\theta.$$

由于积分在 $z=0$ 处正則,所以 $w_1(z)$ 是定数倍的 $J_\nu(z)$. 为了决定这个常数,把指数函数对 z 展开,并利用(1.11)就有[5]

$$w_1(z)=\frac{2\pi i A_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} z^\nu \int_0^\pi \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz)^m}{m!}\cos^m\theta \sin^{2\nu}\theta\, d\theta$$

$$=\frac{2\pi i A_1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} z^\nu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{(2p)!\,\Gamma(\nu+p+1)}(-z^2)^p$$

$$=\frac{2\pi i A_1\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} z^\nu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^p}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}.$$

再使用一下 Γ 函数的二倍公式 $\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=2^{-2p}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1)}$，并且当 $z=0$ 时，与(26.3)比较，从而可决定 A_1，于是就有

$$A_1=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^\nu},$$

$$J_\nu(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \oint_{c_1} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt \tag{26.8}$$

$$=\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{iz\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta \quad \left(\nu+\frac{1}{2}>0\right) \tag{26.9}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^p}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}$$

$$=\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1(\nu+1;-z^2/4). \tag{26.10}$$

这里有

$${}_0F_1(\nu+1;\ -z^2/4)=1-\frac{1}{1!\,(\nu+1)}\cdot\frac{z^2}{4}$$

$$+\frac{1}{2!\,(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!\,(\nu+1)\cdots(\nu+k)}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k+\cdots. \tag{26.11}$$

在 (26.10) 中如令 $\nu\to-\nu$，则就得到 $J_{-\nu}(z)$。这里意味深长的是，虽则 e^{-iz} 与 F 都是 iz 的函数，但是 (26.10) 却是 z 的实函数。即除去 z^ν 项以外，如果以 $-iz$ 代替 iz，原式是不变的。

下面討論沿着 c_2 的积分，先令 $t=(\tau/z)\exp\left(-\frac{3}{2}\pi i\right)$，并且适当地选擇常数因子后，写成

$$w_2\propto z^\nu\int_{\infty\theta}^{(-1,1)}{}_{-i(\theta,-\frac{3}{2}\pi)} e^{izt}t^{2\nu-1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$=e^{-3\nu\pi i}z^{-\nu}\int_{\infty}^{(iz,-iz)}e^{-\tau}\tau^{2\nu-1}\left(1+\frac{z^2}{\tau^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\tau,$$

考虑到这个积分在 $z=0$ 处的正則性后，可以断定它一定非是 $J_{-\nu}(z)$ 不可。当 $z\to0$ 时，要求 $z^{-\nu}$ 的系数，可以利用(2.3)及二倍公式，而有

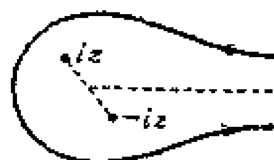


图 26.3

$$e^{-3\nu\pi i}\cdot2i\sin2\nu\pi\cdot e^{2\nu\pi i}\Gamma(2\nu)=\frac{2\pi ie^{-\nu\pi i}}{\Gamma(1-2\nu)}$$

$$=e^{-\nu\pi i}\frac{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^{2\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(1-\nu)}.$$

把这个系数与 (26.10) 中令 $\nu\to-\nu$ 后所得的結果比較，然后决定 $J_{-\nu}(z)$ 所乘的常数，就可得到 $J_{-\nu}(z)$ 的另一种表示式[5]：

$$J_{-\nu}(z)=e^{\nu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{c_2}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt,\quad(26.12)$$

$$|\arg z|<\pi.$$

(3) Hankel 函数（第三种圓柱函数）

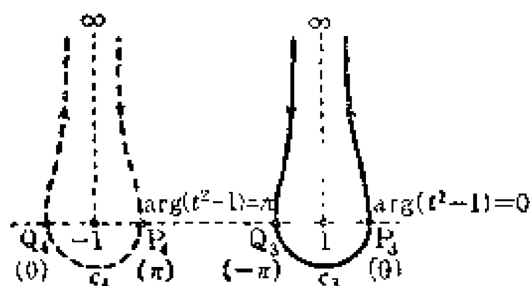


图 26.4

和合流型超几何函数的情形一样，如果把积分路綫选成图 26.4 那样，即由无限远点出发分别圍

繞支点 $+1$, -1 一周以后，仍回到无限远点的曲綫 c_3, c_4 所組成的路綫，就能得到两个在无限远处具有簡单性質的独立解

$$H_\nu^1(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{c_3}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$(-\pi<\arg z<2\pi), \tag{26.13}$$

$$H_\nu^2(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{c_4}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$(-2\pi<\arg z<\pi). \tag{26.14}$$

根据导出的方式可知，它們显然的是 Bessel 方程的解。

这里我們必需对积分路綫作下列补充的规定，即当 $t\to\infty e^{i\alpha}$ 时，α 一定要选擇得使 $\mathrm{Re}(izt)\to-\infty$。此外，在 c_3, c_4 与实軸的交点 P_3, P_4 处（見图），必須规定 $\arg(t^2-1)$ 分別是 0 与 π，至于 $\arg z$，由于上面的规定，我們限制 z 必須避开 -1 与 $+1$ 两点。

現在使两条积分路綫 c_3, c_4 在 ∞ 处接合起来，因为在接合时必須使幅角的值取得一致，故此我們規定在图中的 Q_3 与 Q_4 处 $\arg(t^2-1)$ 的值分别是 0 与 $-\pi$，并且考虑象图 26.5 中的接合方

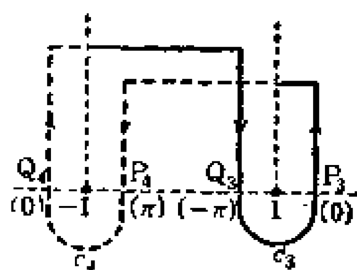


图 26.5

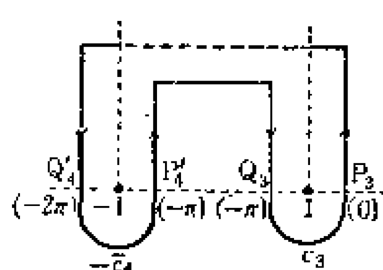


图 26.6

式。在这种接合方式中，負向繞 -1 旋轉半周的积分路綫为 $\underset{(0)}{Q_4}\to\infty\to\underset{(-\pi)}{Q_3}$，另外正向繞 $+1$ 旋轉半周的积分路綫为 $\underset{(0)}{P_3}\to\infty\to\underset{(\pi)}{P_4}$，所以图 26.5 中所示的积分路綫經过适当的变形后，就是路綫 c_1。而

用 $\arg(t^2-1)$ 表示( ),但是根据(26.8)可以看到,这种沿着 c_1 的积分正就是 $2J_\nu(z)$。

要得到相当于积分路綫 c_2 的曲綫,我們把 c_4 的方向加以变更,使得 $\arg(t^2-1)$ 减少了 2π (这样得到的曲綫叫做 $\tilde{c}_4$)。而曲綫是这样連起来的,即 $\underset{(-\pi)}{P'_4}-\infty-\underset{(-\pi)}{Q_3}$。这样就得到了路綫 c_2。据(26.12)易知,沿着 c_2 的积分恰好就是 $2e^{-2\nu\pi i}J_{-\nu}(z)$。此外,沿着 $-\tilde{c}_4$ 的积分是积分 (26.14) 乘以 $e^{-2\nu\pi i}$。

根据上面的討論就能得到下面的关系式

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}[H_\nu^1(z)+H_\nu^2(z)], \tag{26.15}$$

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(z)&=\frac{e^{\nu\pi i}}{2}[H_\nu^1(z)+e^{-2\nu\pi i}H_\nu^2(z)] \\ &=\frac{1}{2}[e^{\nu\pi i}H_\nu^1(z)+e^{-\nu\pi i}H_\nu^2(z)]. \end{aligned} \tag{26.16}$$

如果 ν 与 z 都是实数,那么 $H_\nu^1(z)$ 与 $H_\nu^2(z)$ 将是共軛的复数。

$H_\nu^1(z)$ 与 $H_\nu^2(z)$ 叫做 Hankel 函数,也叫做第三种圆柱函数。

(4) Neumann 函数(第二种圆柱函数)

当次数 ν 是整数 n 时,由 (26.15),(26.16) 有

$$J_n(z)=(-1)^n J_{-n}(z), \tag{26.17}$$

于是 $J_n(z)$ 与 $J_{-n}(z)$ 就不能是相互独立的了。这个关系也能在(26.10)中令 $\nu=-n$ 而导出(由于这时,第 n 項以前的各項,因为 $\Gamma(p-n+1)$ 的关系,有无限大的分母而消失,n 項以后的式子就是 (26.17) 的右边)。

即使 ν 是整数,也可象下面这样地得到对于 $J_\nu(z)$ 独立的解,即定义了函数

$$Y_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}, \tag{26.18}$$

这个函数叫做 Neumann 函数或第二种圆柱函数。如果次数是整

数，那就可以利用极限法 $\lim_{\nu\to n} Y_\nu(z)=Y_n(z)$ 来定义 $Y_n(z)$，即

$$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n} Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}, \quad (26.19)$$

$J_\nu(z)$ 当 $\nu=n$ 时 的微分可以利用(26.10)及(4.4)求出，而有②

$$\frac{d}{d\nu}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(z/2)^{\nu+2p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu+p+1)}\right]_{\nu=n}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left[\log\left(\frac{z}{2}\right)-\psi(n+p+1)\right]\frac{(z/2)^{n+2p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)}$$

$$=J_n(z)\left[\log\frac{z}{2}+\gamma\right]-\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right]$$

$$\times\frac{(z/2)^{n+2p}}{p!(n+p)!}.$$

对于 $J_{-\nu}(z)$ 的微分，如果把它分成由 $p=0$ 到 $p=n-1$，以及由 $p=n$ 到 $p\to\infty$ 的两部分之和，使用 (1.6) 与 (4.4)，并注意关系

$$\frac{\psi(-m+\varepsilon)}{\Gamma(-m+\varepsilon)}=\frac{-1}{\varepsilon\Gamma(-m+\varepsilon)}+o(\varepsilon)=(-1)^{m+1}m!+o(\varepsilon),$$

$$(m=n-1-p\geqslant 0),$$

就可得到下面的表达式

$$\frac{d}{d\nu}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(z/2)^{-\nu+2p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\nu+p+1)}\right]_{\nu=n}$$

$$=-\left[\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left[\log\left(\frac{z}{2}\right)-\psi(-\nu+p+1)\right.\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{(z/2)^{-\nu+2p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\nu+p+1)}\right]\right]_{\nu=n}$$

$$=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p\psi(p-n+\varepsilon+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(p-n+\varepsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2p}\Bigg]_{\varepsilon=0}$$

$$-\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{n+s}\left[\log\left(\frac{z}{2}\right)-\psi(1+s)\right]\frac{(z/2)^{n+2s}}{(n+s)!s!}$$

$$=(-1)^n\left[\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-p-1)!(z/2)^{2p-n}}{p!}\left(\log\frac{z}{2}+\gamma\right)J_n(z)\right.$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)\frac{(z/2)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\Bigg].$$

把这样得到的公式代入(26.19)内,就得

$$\pi Y_n(z)=-\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-p-1)!}{p!\,(z/2)^{n-2p}}+2\left(\log\frac{z}{2}+\gamma\right)J_n(z)$$
$$-\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+p}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)$$
$$\times\frac{(z/2)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}. \tag{26.20}$$

当 $n=0$ 时,第一项不存在。

把(26.15)及(26.16)代入(26.18),就得到

$$Y_\nu(z)=\frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)\}, \tag{26.21}$$

把这个公式与(26.15)合并,并解出 H_ν^1 与 H_ν^2,有

$$\begin{aligned}H_\nu^1(z)&=J_\nu(z)+iY_\nu(z),\\H_\nu^2(z)&=J_\nu(z)-iY_\nu(z).\end{aligned} \tag{26.22}$$

§27　Bessel 函数的渐近展开 I

在(26.13)中令 $t=1+e^{\frac{\pi}{2}i}\dfrac{u}{z}$,并以 u 为积分变数,则得

$$H_\nu^1(z)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}}\,e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{\infty e^{i\beta}}^{(0+)}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du,$$
$$(-\pi<\arg z<2\pi).$$

这里由图27.1可以看到,u 在无限远处与 α 相当的幅角,由于上面的变数变换的关系,可以求出为 $\arg u=\beta=\theta+\alpha-\dfrac{\pi}{2}$. 于是 e^{-u} 当 $u\to\infty$ 时,确实急速地减少。

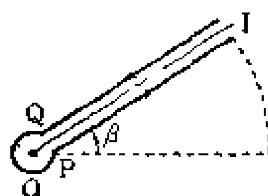


图 27.1

此外,如果設 $\mathrm{Re}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)>0$, 并設积分路綫就是与实軸作成傾角为 β 的直綫 OI, 及一个圍繞着原点的小圓,显然沿着小圓的积分部分将消失。另外在 IQ 岸上 u 的幅角是 u 在 IP 岸上的幅角的 $e^{-2\pi i}$ 倍,所以結果得到了[8]

$$H_\nu^1(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty e^{i\beta}}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du. \tag{27.1}$$

如果把积分路綫取作沿着負方向旋轉了 β 角的直綫,而与实軸一致时,自然对积分的值不起任何变化。

当 $|z|$ 相当大时,可以在(27.1)中以 1 代替 $1+\frac{iu}{2z}$,这样就有

$$H_\nu^1(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}h_\nu^1(z),\quad -\pi<\arg z<2\pi, \tag{27.2}$$

$$h_\nu^1(z)=1+o\left(\frac{1}{z}\right).$$

同样地有(可以形式地以 $-i$ 代替 i 由上式导出)

$$H_\nu^2(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)},\quad -2\pi<\arg z<\pi. \tag{27.3}$$

因此,把上面的公式代入(26.15)及(26.21),就求得

$$J_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{1}{4}\pi\right),$$

$$|\arg z|<\pi \tag{27.4}$$

$$Y_\nu(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{1}{4}\pi\right).$$

关于幅角的限制可以因后面講的(28.21)及(28.22)而取消,从而得到扩張的情形。現在对于 ν 已不再作限制。故此我們在这里可以看到,如果仅看 z 相当大的情况, J_ν 与 Y_ν 所起的作用相当于

三角函数中的正弦与余弦函数，而 H_ν^1, H_ν^2 起着指数函数的作用。

上面所讲的是渐近展开的第一项。要得到进一步的展开，可以象合流型超几何函数所作的那样，把 $[1+iu/(2z)]^{\nu-\frac{1}{2}}$ 用二项式展开成級数，并施以逐項积分。这样，我們所要求的公式，只需要在这个結果中令 $\alpha\to\nu+\dfrac{1}{2}$, $\gamma\to 2\nu+1$, $z\to\dfrac{2}{i}z$ 即可。于是得到

$$h_\nu^1(z)\sim {}_2F_0\left(\nu+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\nu;\ \frac{1}{2iz}\right)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m(\nu,m)}{(2z)^m}$$

$$=u_\nu+iv_\nu=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\nu,2n)}{(2z)^{2n}}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\nu,2n+1)}{(2z)^{2n+1}},\tag{27.5}$$

这里

$$(\nu,m)=\frac{\Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma\left(\nu-m+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{m!}\left\{\nu^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{\nu^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\cdots\left\{\nu^2-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\right\}.$$

对于 H_ν^2 的展开，只要对 (27.3) 乘以 $u_\nu-iv_\nu$ 就能得出。此外，对于 $J_\nu(z)$ 以及 $Y_\nu(z)$，根据 (26.15) 及 (26.21) 有

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}(u_\nu\cos\tau_\nu-v_\nu\sin\tau_\nu),\tag{27.6}$$

$$|\arg z|<\pi$$

$$Y_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}(u_\nu\sin\tau_\nu+v_\nu\cos\tau_\nu),\tag{27.7}$$

这里

$$\tau_\nu=z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi.\tag{27.8}$$

§28 圆柱函数的递推公式与 Bessel 型的积分表示

1. 递推公式 对 $J_\nu(z)$ 的级数表示乘以 z^ν，然后对 z 微分，就有

$$\frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\}=\frac{d}{dz}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2\nu+2p}}{2^{\nu+2p}p!\Gamma(\nu+p+1)}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2\nu+2p-1}}{2^{\nu+2p-1}p!\Gamma(\nu+p)}=z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

如果对 $J_\nu(z)$ 乘以 $z^{-\nu}$，而后对 z 微分，就有

$$\frac{d}{dz}\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}=\frac{d}{dz}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2p}}{2^{\nu+2p}p!\Gamma(\nu+p+1)}$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2p-1}}{2^{\nu+2p-1}(p-1)!\Gamma(\nu+p+1)}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}z^{2p+1}}{2^{\nu+2p+1}p!\Gamma(\nu+p+2)}=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z).$$

在上面的公式中以 $c_\nu(z)$ 的写法代替 $J_\nu(z)$，就有

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dz}\{z^\nu c_\nu(z)\}=z^\nu c_{\nu-1}(z), & (28.1)\\[2mm] \dfrac{d}{dz}\{z^{-\nu}(c_\nu(z))\}=-z^{-\nu}c_{\nu+1}(z). & (28.1')\end{cases}$$

或者可以写成下面的公式

$$\begin{cases}zc_\nu'(z)+\nu c_\nu(z)=zc_{\nu-1}(z),\\ zc_\nu'(z)-\nu c_\nu(z)=-zc_{\nu+1}(z).\end{cases}\qquad(28.2)$$

把上面的两式相加或是相减，就有

$$\begin{cases}2c_\nu'(z)=c_{\nu-1}(z)-c_{\nu+1}(z),\\ \dfrac{2\nu}{z}c_\nu(z)=c_{\nu-1}(z)+c_{\nu+1}(z).\end{cases}\qquad(28.3)$$

一般我們称满足第一对递推公式(它們实际是等价的)的函数 $c_\nu(z)$ 为变数 z 与位数 ν 的圆柱函数。例如由(28.1)式及(28.1′)式，可以导出 $c_\nu(z)$ 满足下式

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-(2\nu-1)}\frac{d}{dz}\{z^\nu c_\nu(z)\}\right]=\frac{d}{dz}[z^{-\nu+1}c_{\nu-1}(z)]=-z^{-(\nu-1)}c_\nu(z).$$

将微分求出以后，就可看到 $c_\nu(z)$ 是 Bessel 方程

$$\frac{d^2}{dz^2}c_\nu+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}c_\nu+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)c_\nu=0$$

的解。

Bessel 微分方程还有另外一个次数不是 ν，而是 $-\nu$ 的解，設 b_ν 是满足关系式 $b_{\nu+1}=-b_\nu$ 的 ν 的函数，于是 $b_\nu J_{-\nu}(z)$ 就满足 c_ν 所满足的遞推公式。

譬如对于 $J_{-\nu}(z)$ 使用 (28.2) 中上(下)面的公式，就可得[9]

$$zb_\nu J'_{-\nu}(z)\mp\nu b_\nu J_{-\nu}(z)=\pm zb_\nu J_{-\nu-1}(z)=\mp zb_{\nu+1}J_{-(\nu\pm1)}(z).$$

这样就証明了 $b_\nu J_{-\nu}(z)$ 满足的是 $c_\nu(z)$ 所满足的(28.2)下(上)面的公式。

另外，如果令 a_ν 是满足关系 $a_{\nu+1}=a_\nu$ 的函数，那么明显地 $a_\nu J_\nu(z)+b_\nu J_{-\nu}(z)$ 满足 $c_\nu(z)$ 所满足的遞推公式。可是由(26.15)及(26.16)可以导出下面的关系

$$\left.\begin{matrix}H_\nu^1(z)\\H_\nu^2(z)\end{matrix}\right\}=\frac{\pm ie^{\mp\nu\pi i}}{\sin\nu\pi}J_\nu(z)\mp\frac{i}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(z),\qquad(28.4)$$

并且根据(26.18)可以理解，$Y_\nu(z)$ 和 Henkel 函数一样，也具有 $a_\nu J_\nu(z)+b_\nu J_{-\nu}(z)$ 的形状。因此 H_ν^1, H_ν^2, $Y_\nu(z)$ 和 $J_\nu(z)$ 一样都以 $c_\nu(z)$ 所满足的遞推公式为它們共有的遞推式。

自然，遞推公式也可由函数的积分表示导出。此外，如果換写一下(28.1)成为下面的样子

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\{z^\nu c_\nu(z)\}=z^{\nu-1}c_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\{z^{-\nu}c_\nu(z)\}=-z^{-(\nu+1)}c_{\nu+1}(z),$$

并以 $d/(zdz)$ 作为运算子，連接使用后，就有

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\{z^\nu c_\nu(z)\}=z^{\nu-m}c_{\nu-m}(z),$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\{z^{-\nu}c_\nu(z)\}=(-1)^m z^{-\nu-m}c_{\nu+m}(z). \tag{28.5}$$

特别是，如果令 $c_\nu(z)=c_0(z)$，则可以由 $c_0(z)$ 出发，陆續地导出各整数次数的 Bessel 函数。

2. Bessel 型积分

(1) 我們試求滿足递推公式 (28.3) 的函数 c_ν 的形状。結果就能得到 Bessel 函数的表示。

在(28.3)最后的等式中去掉分母，就得到

$$zc_{\nu+1}-2\nu c_\nu+zc_{\nu-1}=0. \tag{28.6}$$

这个方程可以看作是 ν 的等差方程，这种方法的一般解法是用 Mellin 变换，把所求的解表示成为复数积分的形式：

$$c_\nu=\int_c t^{-\nu-1}\varphi(t)\,dt. \tag{28.7}$$

作分部积分，有

$$\nu c_\nu=-\int_c\varphi(t)\,d(t^{-\nu})=-t^{-\nu}\varphi(t)\Big]_c+\int_c\varphi'(t)t^{-\nu}\,dt,$$

代入(28.6)后，就有

$$\int_c t^{-\nu}\left[z\varphi(t)-2\varphi'(t)+\frac{z}{t^2}\varphi(t)\right]dt-2\varphi(t)t^{-\nu}\Big]_c=0.$$

由这里就能得到决定 $\varphi(t)$ 的微分方程(即令积分記号内的 [ ] 等于零)，以及决定积分路綫 c 的条件，这样就得

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right),\quad \varphi(t)t^{-\nu}\Big]_c=0$$

解出微分方程后，就得到

$$\log\varphi(t)=\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\text{const}.$$

把这种解代入到(28.7)，再适当地选定常数，可以考虑象下面这样的积分

$$c_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,dt\,. \tag{28.8}$$

設 $\arg z=\theta$，积分路綫为由方向 $\arg t=\alpha=-\pi-\theta$ (只要满足在积分路綫的端点，有 $\mathrm{Re}(zt)\to-\infty$ 的任一值即可) 的无限远点 I 出发，正向圍繞 0 一周后，仍沿着这个方向趋于无限远的曲綫 (見图 28.1)。这样自然也就滿足了积分路綫所应滿足的条件 (由于在 I 处 $\varphi(t)$ 按指数函数方式趋于 0)。

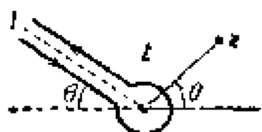
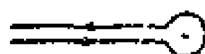


图 28.1


图 28.2

在(28.8)中令 $t=\frac{2s}{z}$，就得

$$c_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)}s^{-\nu-1}e^{s-\left(\frac{z}{2}\right)^2\frac{1}{s}}\,ds. \tag{28.9}$$

对函数 $\exp\left[-\left(\frac{z}{2}\right)^2\frac{1}{s}\right]$ 作它在 $s=0$ 近傍的 Laurant 展开式，并使用 (2.4) 求出逐項积分的各項后(当 $|s|>\delta>0$ 时，級数一致收斂)，与(26.10)比較，就有

$$\begin{aligned}c_\nu(z)&=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)}e^s\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}s^{-\nu-p-1}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^p}{p!}\int_{-\infty}^{(0+)}e^s s^{-\nu-p-1}ds\text{①}\\&=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^p}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}=J_\nu(z).\end{aligned}$$

即 $c_\nu(z)$ 正好就是 $J_\nu(z)$，并且有

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty e^{-i\theta}}^{(0_+)} t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt. \qquad (28.10)$$

这个积分叫做 $J_\nu(z)$ 的 Bessel 型的积分表示。

下面为了简单起見，恒設 $|\theta|=|\arg z|<\frac{\pi}{2}$，在上面的积分中自然可以取 $-\infty\to 0_+\to-\infty$ 这样的路綫作为积分路綫（見图 28.2′）①。

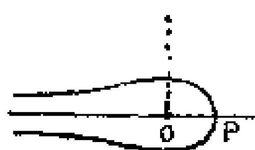


图 28.2′

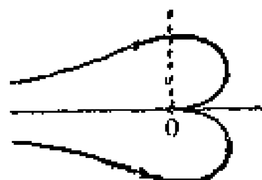


图 28.3

現在如图 28.3 中那样，在 P 处切断积分路綫，并且沿着实軸使 P 点向原点推进，而得到二条积分路綫，这样就有

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{+0}^{\infty e^{i\pi}}+\frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-i\pi}}^{+0}\right]t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt, \qquad (28.11)$$

現在对于 $t=+0$ 也成立着积分路綫端点的条件，即 $t^{-\nu}\varphi(t)\to 0$，这样就能順序地导出各位为 ν 的圆柱函数。此外，在 (28.11) 中，如令 $\nu\to-\nu$，$t\to e^{\pm i\pi}/s$，則有

$$J_{-\nu}(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{-e^{\nu\pi i}}{\pi i}\int_{\infty e^{i\pi}}^{+0}+\frac{-e^{-\nu\pi i}}{\pi i}\int_{+0}^{\infty e^{-i\pi}}\right]s^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}ds,$$

如令 $s\to t$，則有

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi i}\int_{+0}^{\infty e^{i\pi}}+\frac{e^{-\nu\pi i}}{\pi i}\int_{\infty e^{-i\pi}}^{+0}\right]t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt. \qquad (28.12)$$

把 (28.11)，(28.12) 与 (26.15)，(26.16) 对比，就能得出 $H_\nu^1(z)$，$H_\nu^2(z)$ 所具有的积分表示，即

$$H_\nu^1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{+0}^{\infty e^{i\pi}}t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt,$$

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}, \qquad (28.13)$$

$$H_\nu^2(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{+0}^{\infty e^{-i\pi}} t^{-\nu-1} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,dt. \qquad (28.14)$$

由这种积分表示自然可以看出，当 z 是实数时，这两个函数恰好是共轭的。至于一般的情形，因为对 (28.13) 的积分界限来說，z 的幅角 θ 可以由 0 起任意地变化，所以我們只要求当 $|t|\to\infty$ 时，zt 与 $-z/t$ 的实部分别趋于 0 即可，即在(28.13)中以 $\infty\exp i(\pi-\theta)$, $0\exp i\theta$ 为积分界限，在(28.14)中以 $\infty\exp -i(\pi+\theta)$, $0\exp i\theta$ 为积分界限即可。

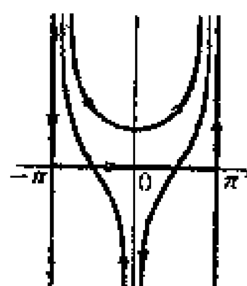


图 28.4

(2) 令 $t=e^{-i\tau}(\tau=i\log t)$，就可以把(28.13)与(28.14)写成下式

$$H_\nu^1(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty i}^{-\pi+\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}\,d\tau,$$

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}, \qquad (28.14')$$

$$H_\nu^2(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi+\infty i}^{-\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}\,d\tau$$

(图 28.4)。

对于 $J_\nu(z)$，由(28.10)或由(26.15)式就能得到

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\infty i}^{\pi+\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}\,d\tau. \qquad (28.15)$$

象图 28.4 中那样把积分路綫变形，即通常变成 $-\pi+i\infty\to-\pi\to\pi\to\pi+i\infty$ 这样的直綫后，沿着各条积分路綫引入新独立变数，$\tau=-\pi+i\eta$, $\tau=\xi$, $\tau=\pi+i\eta$，则导出了

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu\xi-z\sin\xi)}\,d\xi-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\nu\eta+z\sinh\eta)}\,d\eta. \qquad (28.15')$$

当 ν 是整数时，第二个积分将消失。

当 $\arg z$ 取一般的 θ 值时，我們注意在 (28.13) 后面所作的解释，就有

$$H_\nu^1(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta-\pi+\infty i}^{-\theta-\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}\,d\tau, \qquad (28.16)$$

$$H_\nu^2(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta-\infty i}^{\theta+\pi+\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}\,d\tau. \qquad (28.17)$$

此外，对于 $J_\nu(z)$，由 (26.16) 就有

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi+\infty i}^{\theta+\pi+\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}\,d\tau. \qquad (28.18)$$

关于 (28.16) ~ (28.18) 内积分界限中所表示的 τ 的实数部分，允許以这个值为中心取 $\pm\frac{\pi}{2}$ 范圍内的任意值而不对积分发生影响 (这些值属于图 28.5 中的斜綫部分)。卽如果令 $z=re^{i\theta}$，$\tau=\xi+i\eta$，当 $\eta\to\pm\infty$ 时，$\sin\tau=\sin\xi\cosh\eta+i\cos\xi\sinh\eta\to\frac{1}{2}(e^{|\eta|}\sin\xi\pm ie^{|\eta|}\cos\xi)=\frac{\pm i}{2}e^{|\eta|\mp i\xi}$，所以

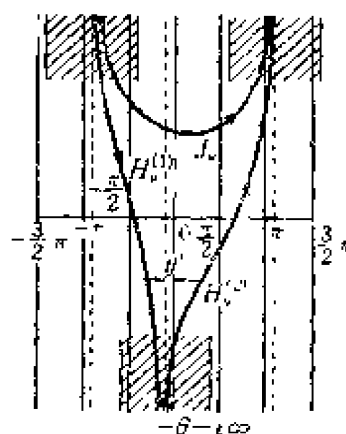


图 28.5

$-iz\sin\tau$ 的实部，实际是被 $\pm\frac{r}{2}e^{|\eta|}\cos(\xi\mp\theta)$ 所支配着，因此当 $\eta\to\infty$ 时，取 $\cos(\xi-\theta)<0$，当 $\eta\to-\infty$ 时，取 $\cos(\xi+\theta)>0$ 卽可。从而在 (28.16) ~ (28.17) 中当 $\eta\to\infty$ 时，$\xi-\theta$ 将趋于 $-\pi$，或是趋于 π，而当 $\eta\to-\infty$ 时 $\xi+\theta$ 将趋于 0.

另外，对于 (28.16)，如果以 $ze^{i\pi}$ 代替 z，由于現在的幅角是 $\theta+\pi$，所以有

$$H_\nu^1(ze^{i\pi})=\frac{1}{\pi}\int_{\theta+\infty i}^{-\theta-\pi-\infty i} e^{iz\sin\tau+i\nu\tau}\,d\tau,$$

令 $\tau\to\tau-\pi$，由 (28.17) 可以看到

$$H_\nu^1(ze^{i\pi})=\frac{1}{\pi}e^{-i\nu\pi}\int_{\theta+\pi+\infty i}^{-\theta-\infty i}e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau=-e^{-i\nu\pi}H_\nu^2(z).\quad(28.19)$$

另一方面,在(28.17)中,作 $z\to ze^{i\pi}$, $\tau\to\tau+\pi$ 的代换以后,就得

$$H_\nu^2(ze^{i\pi})=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta-\pi-\infty i}^{\theta+2\pi+\infty i}e^{iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

$$=\frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\int_{-\theta-2\pi-\infty i}^{\theta+\pi+\infty i}e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau,$$

分解积分路綫后,在第一項中令 $\tau\to\tau-2\pi$, 就得到

$$H_\nu^2(ze^{i\pi})=\frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\left[\int_{-\theta-2\pi-\infty i}^{\theta-\pi+\infty i}+\int_{\theta-\pi+\infty i}^{-\theta-\infty i}+\int_{-\theta-\infty i}^{\theta+\pi+\infty i}\right]\cdot e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

$$=\frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\left[(e^{-2i\nu\pi}+1)\int_{-\theta-\infty i}^{\theta-\pi+\infty i}+\int_{\theta-\pi+\infty i}^{-\theta-\infty i}\right]\cdot e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

$$=e^{i\nu\pi}H_\nu^1(z)+2\cos\nu\pi H_\nu^2(z).\quad(28.20)$$

接連地使用(28.19),(28.20)后,对于整数 m,有下面的公式

$$H_\nu^1(ze^{m\pi i})=\frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^1(z)-e^{-i\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^2(z),\quad(28.21)$$

$$H_\nu^2(ze^{m\pi i})=e^{i\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^1(z)+\frac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^2(z)\quad(28.22)$$

(用数学归納法来証明上面公式是很簡单的). 由这里可以看到, H_ν^1 与 H_ν^2 一般是多値函数。如果把幅角增加了 2π,則函数的値一般不能还原。在原点处的指数分别为 ν 与 $-\nu$. 很明显原点对两个函数都是支点(如 ν 是整数时, $Y_n(z)$ 就会有对数項)⑫。

§29 Bessel 函数的漸近展开 II

在第2章中所求的漸近展开式,应用于公式(28.21)~(28.22)以及 z 的任意的幅角的时候,可以看到,当次数 ν 与 z 同程度的相当大时,并不能得出良好的近似值。現在假設 ν 与 z 都趋于无限

大，幷且 $\frac{z}{\nu}$ 的比是定值，我們利用第1章所說的鞍点法来求漸近展开的公式。为了簡单起見，假設 ν 与 z 都是正的实数[13]。

(1) $\nu > z \gg 1$ 的情形 $(\nu/z = \cosh\alpha > 1)$。考察一下 $H_\nu^1(z)$ 的积分表示 (28.14) 有

$$H_\nu^1(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty i}^{-\pi+\infty i} e^{\nu(-iz\sin\tau/\nu + i\tau)}\,d\tau$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty i}^{-\pi+\infty i} e^{\nu f(\tau)}\,d\tau, \tag{29.1}$$

这里

$$f(\tau) = -\frac{iz}{\nu}\sin\tau + i\tau. \tag{29.2}$$

由于

$$f'(\tau) = -\frac{iz}{\nu}\cos\tau + i, \qquad f''(\tau) = \frac{iz}{\nu}\sin\tau, \tag{29.3}$$

所以可利用条件 $f'(\tau_0) = 0$，而求出鞍点 τ_0，即

$$\cos\tau_0 = \frac{\nu}{z} = \cosh\alpha > 1.$$

因此方程的根必然是 $\pm i\alpha + 2n\pi$ (n 整数)，幷且有

$$\alpha = \cosh^{-1}\frac{\nu}{z}, \tag{29.4}$$

令 $\tau = \xi + i\eta$，幷求出 $f(\tau)$ 的实部与虛部，則有

$$\mathrm{Re} f(\tau) = +\frac{z}{\nu}\cos\xi\sinh\eta - \eta, \tag{29.5}$$

$$\mathrm{Im} f(\tau) = -\frac{z}{\nu}\sin\xi\cosh\eta + \xi. \tag{29.6}$$

由于沿着积分路綫 $\mathrm{Im} f(\tau)$ 是不变的，而积分路綫 S 又非通过鞍点不可(即 $\tau = -i\alpha$)，所以沿着积分路綫 $\mathrm{Im} f(\tau) = 0$。

$\frac{d^2}{d\eta^2}\mathrm{Re} f(\tau)$ 在 $S'(\tau_0 = -i\alpha)$ 处是負的，在 $S(\tau_0 = i\alpha)$ 处是正

的，所以对于 (29.1)，积分路綫成为图 29.1 中的 $P'S'SQ$，$\exp[\nu f(\tau)]$ 在鞍点 S' 处取得最大値，它的値在 S 处沿着虚軸为极小，而沿着 SQ 的方向为极大(图中箭头的意义是沿着这个方向前进时 $\nu f(\tau)$ 减少)。这样，应用公式(3.5)后就可得(29.1)的漸近展开式为

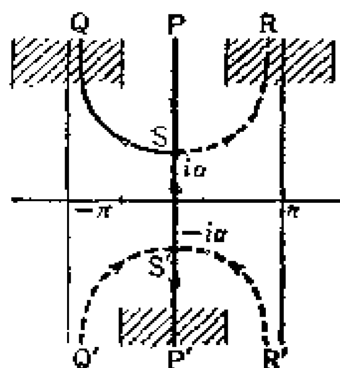


图 29.1

$$f(\tau_0)=f(-i\alpha)=-\frac{iz}{\nu}(-i\sinh\alpha)+\alpha=\alpha-\frac{z}{\nu}\sinh\alpha,$$

$$\nu f''(-i\alpha)=z\sinh\alpha.$$

利用这个結果，就可得下面的表达式

$$H_\nu^1(z)\sim-\frac{1}{\pi}e^{\nu f(\tau_0)}\sqrt{2\pi/\nu e^{\pi i}f''(\tau_0)}$$

$$=\frac{i}{\pi}e^{\nu\alpha-z\sinh\alpha}\sqrt{\frac{2\pi}{z\sinh\alpha}}$$

$$=i\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\nu^2-z^2}}}\,e^{\nu\cosh^{-1}(\nu/z)-\sqrt{\nu^2-z^2}}. \tag{29.7}$$

$H_\nu^2(z)$ 的积分路綫为 $RSS'P'$，因为現在和前面所討論的情形相反，积分路綫通过鞍点 S'，所以得到了达到上面程度的近似式

$$H_\nu^2(z)\sim-H_\nu^1(z) \tag{29.8}$$

(与(29.7)式共軛)。

由于 $J_\nu(z)$ 是 $H_\nu^1(z)$ 与 $H_\nu^2(z)$ 的平均値，所以由 (29.8) 可以看到 $J_\nu(z)$ 趋于 0。这句話的正确意义应該这样来理解，因为 $|H_\nu^1|\gg|J_\nu|$，所以由 S 所生的部分，相互抵消了，从而对于 $J_\nu(z)$ 必須求它更高次的近似才可。但是由上面推导的方法可以看到，鞍点 S' 較鞍点 S 为低，故此由 (28.18) 能够理解，对于 $J_\nu(z)$，它可

能在积分路綫 $QS'R$ 上具有使 $\exp\nu f(\tau)$ 成为最大值的鞍点。使用公式

$$f(i\alpha)=-f(-i\alpha)=-\alpha+\frac{z}{\nu}\sinh\alpha,$$

$$f''(i\alpha)=-\frac{z}{\nu}\sinh\alpha,$$

并且参照(28.15)，就得

$$J_\nu(z)\sim\frac{1}{2\pi}e^{-\nu\alpha+z\sinh\alpha}\sqrt{\frac{2\pi}{z\sinh\alpha}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\nu^2-z^2}}e^{-\nu\cosh^{-1}(\nu/z)+\sqrt{\nu^2-z^2}}. \qquad (29.9)$$

(2) $z>\nu\gg1$ 的情形（即 $\nu/z=\cos\alpha<1$）。根据 (29.3)，鞍点 τ_0 是 $\cos\tau_0=\nu/z=\cos\alpha$ 的根，所以 $\tau_0=\pm\alpha+2n\pi$。由于 (29.6)，对于通过 $\tau_0=\pm\alpha$ 的积分路綫有

$$\text{Im}f(\tau)=-\frac{\sin\xi}{\cos\alpha}\cosh\eta+\xi$$

$$=\text{const}=\pm\alpha\mp\tan\alpha,$$

即如图 29.2 所表示的曲綫。对于 H_ν^1，如果令 $\tau_0=-\alpha$，則取图中 $P'(-\alpha)Q$ 的积分路綫即可。参看(29.5)就知道，$\text{Re}f(\tau)$ 在 P' 及 Q 处（积分路綫的端点处）趋于 $-\infty$。在 $\tau_0=-\alpha$ 处，最大的值是 0。使用关系式

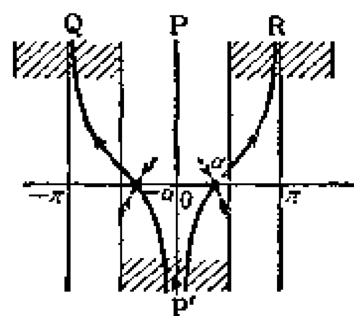


图 29.2

$$f(-\alpha)=i(\tan\alpha-\alpha),\quad f''(-\alpha)=-i\tan\alpha,$$

就有

$$H_\nu^1(z)\sim\frac{1}{\pi}e^{i\nu(\tan\alpha-\alpha)}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu e^{\pi i/2}\tan\alpha}}=\sqrt{\frac{2}{\pi\nu\tan\alpha}}e^{i z\left(\tan\alpha-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (29.10)$$

至于 $H_\nu^2(z)$ 所满足的式子可取上式的共軛数，$J_\nu(z)$ 所满足的式子可取上式的实部即可。

§30　整数次的Bessel函数与母函数

1. 当 ν 是正整数 n (或是 0) 时，对于 (28.10)，t 的原点就不再是支点了，把积分路綫变形，并把积分分成为沿着負实軸的直綫部分往返的积分，以及圍繞原点一周的曲綫积分，則由前者所生的积分値等于 0，从而

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint t^{-n-1}\,e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\,dt. \tag{30.1}$$

这个公式告訴我們，$J_n(z)$ 就是把 $\exp\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ 对 t 作 Laurent 展开中 t^n 的系数，即有

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n, \tag{30.2}$$

因此左边的函数叫做 $J_n(z)$ 的母函数。

在这里，令 $t=e^{i\theta}$，并利用关系式 $J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$，則有

$$e^{iz\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)\,e^{in\theta}=J_0(z)+2J_2(z)\cos 2\theta+2J_4(z)\cos 4\theta$$
$$+\cdots+2i[J_1(z)\sin\theta+J_3(z)\sin 3\theta+\cdots]. \tag{30.3}$$

把上面的公式分成实部与虛部，就得

$$\cos(z\sin\theta)=J_0(z)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(z)\cos 2m\theta, \tag{30.4}$$

$$\sin(z\sin\theta)=2\sum_{m=0}^{\infty}J_{2m+1}(z)\sin(2m+1)\theta. \tag{30.5}$$

此外，如果作变换 $\theta\to\frac{\pi}{2}-\theta$，則

$$\cos(z\cos\theta)=J_0(z)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mJ_{2m}(z)\cos 2m\theta, \tag{30.6}$$

$$\sin(z\cos\theta)=2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^mJ_{2m+1}(z)\cos(2m+1)\theta. \tag{30.7}$$

如果在 (30.1) 中令 $t=e^{i\theta}$，或是在 (28.15′) 中令 $\nu=n$，而取积分的实部，則有

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta-n\theta)\,d\theta \tag{30.8}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin\theta)\cos n\theta d\theta & (n\text{ 为偶数时}),\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\sin\theta)\sin n\theta d\theta & (n\text{ 为奇数时}).\end{cases} \tag{30.9}$$

公式 (30.9) 可以对 (30.4) 与 (30.5) 分别乘以 $\cos n\theta$ 及 $\sin n\theta$，然后由 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分而导出[④]。

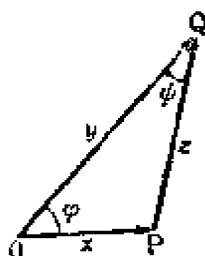


图 30.1

2. 加法定理 如图 30.1 那样，把以 P 为中心、以 z 为动徑的圆柱函数，表达成为以 0 为中心、x 与 y 的圆柱函数的公式，叫做加法公式。为了使問題比較簡化，我們設 x, y 都是正数，并且 $y>x$。

注意在 $J_\nu(z)$ 的积分表示(28.10)中有 $z=(x^2+y^2-2xy\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$ $=[(y-xe^{i\varphi})\ (y-xe^{-i\varphi})]^{\frac{1}{2}}$，然后令

$$t=\left[\frac{y-xe^{-i\varphi}}{y-xe^{i\varphi}}\right]^{\frac{1}{2}}s,$$

则能将(28.10)式写成

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{s}{t}\right)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)}s^{-\nu-1}\exp\left[\frac{y-xe^{-i\varphi}}{2}s-\frac{y-xe^{i\varphi}}{2s}\right]ds.$$

对于积分中的指数函数，作下面的因子分解

$$e^{\left[\frac{y}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)\right]}\cdot e^{\frac{x}{2}\left[\frac{e^{i\varphi}}{s}-\frac{s}{e^{i\varphi}}\right]},$$

并把第二項依据(30.2)展开，再使用(28.10)，結果得

$$J_\nu(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi})=J_\nu(z)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{s}{t}\right)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)}e^{\frac{y}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}s^{-\nu-m-1}J_m(x)\,e^{im\varphi}ds$$

$$=\left(\frac{y-xe^{i\varphi}}{y-xe^{-i\varphi}}\right)^{\frac{\nu}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)J_{\nu+m}(y)\,e^{im\varphi}. \tag{30.10}$$

此外，如果令图中的动徑 z 与动徑 y 的夹角为 ψ，并且注意 $y=xe^{i\varphi}+ze^{-i\psi}=xe^{-i\varphi}+ze^{i\psi}$，则能得到

$$J_\nu(z)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)J_{\nu+m}(y)\,e^{im\varphi}, \tag{30.11}$$

这样就把以 P 为中心的圆柱函数表达成为以 0 为中心的函数。

对于一般的圆柱函数 $c_\nu(z)=a_\nu J_\nu(z)+b_\nu J_{-\nu}(z)$，$a_{\nu+m}=a_\nu$，$b_{\nu+m}=(-1)^m b_\nu$，可以立刻得到类似的表达式。先把(30.11)$\times a_\nu$，再把(30.11)作代换 $\nu\to-\nu$，$\varphi\to-\varphi$，$\psi\to-\psi$，然后把結果乘以 b_ν，将这两个公式相加，就得关系式

$$c_\nu(z)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{\nu+m}(y)J_m(x)\,e^{im\varphi}. \tag{30.12}$$

此外，上面的公式当条件 $|y|>|xe^{\pm i\varphi}|$ 成立时，对于一般的复变数也都成立。

§31 半奇数次的 Bessel 函数

次数为半奇数的 Bessel 函数具有非常簡单的形状。这时，在(26.3)中，F 是陪 Laguerre 多项式，从而(27.5)的級数必須在有限项截止。

在 $H_\nu^{(1)}(z)$ 的积分表示中，如果 $\nu=\dfrac{1}{2}$，那么立刻可以求出积分，而有[35]

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz}. \tag{31.1}$$

参照了(26.15)及(26.21)后，就有

$$\begin{aligned}&H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z)=i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-iz}, \qquad J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\\ &J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad Y_{\frac{1}{2}}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.\end{aligned} \tag{31.2}$$

对于 $J_{\frac{1}{2}}(z)$ 的公式也能直接由級数展开式导出。

由(31.2)出发，利用递推公式(28.5)，能够导出次数为任意半奇数 $n+\frac{1}{2}$ 的 $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$。即

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left(\frac{\sin z}{z}\right),$$

$$H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n+1}i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\frac{e^{iz}}{z},\qquad(31.3)$$

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left(\frac{\cos z}{z}\right).$$

此外，由(26.18)能导出关系式

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{n+1}J_{-(n+\frac{1}{2})}(z).\qquad(31.4)$$

另外由(31.3)(例如使用数学归纳法)，或是由(27.6)及(27.7)可以导出

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\{f_{n+\frac{1}{2}}(z)\sin z-g_{n+\frac{1}{2}}(z)\cos z\},\qquad(31.5)$$

并且还可以导出

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}(-1)^{n-\frac{1}{2}}\{g_{n+\frac{1}{2}}(z)\sin z+f_{n+\frac{1}{2}}(z)\cos z\},\qquad(31.6)$$

例如有

$$f_{\frac{1}{2}}=1,\qquad f_{\frac{3}{2}}=\frac{1}{z},\qquad f_{\frac{5}{2}}=\frac{3}{z^2}-1,\qquad f_{\frac{7}{2}}=\frac{15}{z^3}-\frac{6}{z},$$

$$g_{\frac{1}{2}}=0,\qquad g_{\frac{3}{2}}=1,\qquad g_{\frac{5}{2}}=\frac{3}{z},\qquad g_{\frac{7}{2}}=\frac{15}{z^2}-1.$$

此外，如果对球面坐标的 Helmholtz 方程的球面调和函数，用变数分离法分离了角的部分以后，对动径部分，令 $kr=z$，就可得方程

$$\frac{d^2}{dz^2}R+\frac{2}{z}\frac{d}{dz}R-\frac{n(n+1)}{z^2}R+R=0\qquad(31.7)$$

(参照(5.1)及(5.24))。令 $R(z)=z^{-\frac{1}{2}}w(z)$，則上面的方程归結成为(26.1)中 $\nu=n+\frac{1}{2}$ 的情形，即解 $R(z)$ 可以表示成为

$$j_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{n+\frac{1}{2}},\quad h_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}H_{n+\frac{1}{2}}(z),\qquad(31.8)$$

$$y_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}Y_{n+\frac{1}{2}}.$$

这一类的函数叫做 Bessel 球函数。在(26.9)中如令 $\nu=n+\frac{1}{2}$，并令 $\cos\theta=t$，反复地利用分部积分法，并参照(17.9)，就有

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z)=\frac{(z/2)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,n!}\int_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^n dt$$

$$=\frac{i^n z^{\frac{1}{2}}}{2^n\sqrt{2\pi}\,n!}\int_{-1}^{1}e^{izt}\frac{d^n}{dt^n}(1-t^2)^n dt$$

$$=\frac{1}{2i^n}\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\int_{-1}^{1}e^{izt}P_n(t)\,dt.\qquad(31.9)$$

利用(31.9)后，能有

$$j_n(z)=\frac{1}{2i^n}\int_{-1}^{1}e^{izt}P_n(t)\,dt=\frac{1}{2i^n}\int_0^{\pi}e^{iz\cos\theta}P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

$$(31.10)$$

这个公式显示了球面函数与球的动徑方向的函数之間，由于变换函数 e^{izt} 而成立的結合关系。这个关系与(30.8)～(30.9)，即結合圆柱的角函数 $\cos n\theta$ 与动徑函数 J_n 的积分变换，表示着同一个事实。

§32　变形 Bessel 函数

1. 当(2)中的 $\varkappa-h^2$ 是負数 $-k^2$ 时，則可以作代换 $kr=\sqrt{h^2-\varkappa}\,r=x$，并得到

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0. \tag{32.1}$$

x 与 (32.6) 中 z 之間成立着关系 $z=\pm ix$，故此上面的方程以 $c_\nu(\pm ix)$ 为解。实际中，为了研究 R 是 x 的实函数时比較方便，我們定义下列的新的函数，即

$$I_\nu(x)=e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(ix)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{\nu+2p}}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x$$

$$(x\to\infty), \tag{32.2}$$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi i}{2}e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}H_\nu^1(ix)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}W_{0,\nu}(2x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\ (x\to\infty), \tag{32.3}$$

这两个函数分别叫做第一种及第二种的变形 Bessel 函数。

至于这些函数的性質，无疑地可以直接由它們的定义导出。

2. 在 $\kappa-m^2$ 是純虛数 $-i$ 的情形，这时方程

$$\frac{d^2}{dx^2}R+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}R-iR=0 \tag{32.4}$$

的解可以写成 $I_0(i^{\frac{1}{2}}x)$，$K_0(i^{\frac{1}{2}}x)$，把这两个函数分成实部与虛部后，有下面通用的写法

$$I_0(i^{\frac{1}{2}}x)=\mathrm{ber}(x)+i\,\mathrm{bei}(x),$$

$$(32.5)$$

$$K_0(i^{\frac{1}{2}}x)=\mathrm{ker}(x)+i\,\mathrm{kei}(x).$$

第7章　Mathieu 函数

§33　Mathieu 微分方程

第2章中所講的二維 Holmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2 u=0, \tag{33.1}$$

如果把独立变数 x, y 变成用

$$x=c\cosh\xi\cos\eta,\quad y=c\sinh\xi\sin\eta \tag{33.2}$$

所定义的椭圓坐标 (ξ,η)，則得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{c^2k^2}{2}(\cosh 2\xi-\cos 2\eta)u=0. \tag{33.3}$$

现在設 u 是只含变数 ξ 的函数 Ξ 与只含变数 η 的函数 H 的乘积，則 Ξ, H 分别满足下列的微分方程

$$-\frac{d^2\Xi}{d\xi^2}+(\lambda-2h^2\cosh 2\xi)\Xi=0, \tag{33.4}$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2}+(\lambda-2h^2\cos 2\eta)H=0, \tag{33.5}$$

这里 $h=\frac{ck}{2}$. 方程(33.5)叫做 Mathieu 微分方程，方程(33.4)叫做变形 Mathieu 微分方程。容易看出，(33.4)就是在(33.5)中令 $i\xi$ 代替 η 所得的結果. 本章的目的，就是要研究作为这种方程的解所定义的函数的一些性質。

下面我們設 Mathieu 微分方程具有形状为

$$\frac{d^2 w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=0. \tag{33.6}$$

这个方程含有两个变数 λ 与 h^2，在物理学的应用中，h^2 常常是一

个原始給定的定数，而对于变数 λ，常常可以利用其他的条件，譬如要求(33.6)具有滿足一定初始条件并以 2π 为周期的解，从而以 λ 作为固有値而决定。本书假設 h^2 是实数(这样，h 必須是实数或是純虛数)，但是所得的結果常常对于一般复数的 h 也是正确的。

容易看到 Mathieu 方程(33.6)的独立变数是 z，并且对于所有有限的 z 点，方程是正則的。无限远点是奇异点，这个奇异点是非正則的。如果利用变换 $\mu=\cos z$ 变换独立变数，則方程(33.6)成为

$$(1-\mu^2)\frac{d^2w}{d\mu^2}-\mu\frac{dw}{d\mu}+(\lambda+2h^2-4h^2\mu^2)w=0. \quad (33.7)$$

对于这个方程，可以看到 $\mu=\pm1$ 是它的正則奇异点，而 $\mu=\infty$ 是非正則奇异点。此外，如果令 $w=(1-\mu^2)^{\frac{1}{4}}v$，則对于 v 就有微分方程

$$(1-\mu^2)\frac{d^2v}{d\mu^2}-2\mu\frac{dv}{d\mu}+\left(\frac{1}{2}+\lambda+2h^2-4h^2\mu^2-\frac{\frac{1}{4}}{1-\mu^2}\right)v=0. \quad (33.8)$$

这个方程的形状与 Legendre 方程的形状相似，事实上，根据下一章討論的結果，这个方程的解将是回轉橢球函数的特款。

§34 基本解 $w_{\rm I}(z)$, $w_{\rm II}(z)$

下面我們研究原始形态的 Mathieu 方程(33.6)。

由于(33.6)对于一切有限的 z 都是正則的，所以对一定的 $z=z_0$，如果給出了解 w 及 $\frac{dw}{dz}$ 在这点的値，一定存在唯一的符合这种初始条件的解①。这个解在全部 z-平面上除去 ∞ 以外都是正則的。換一句話来說，就是方程(33.6)的解都是整函数。

此外，如果 $w(z_0)$ 与 $w'(z_0)$ 所取的値不是 λ 或是 h^2，那么方程

(33.6)的这样的解能够証明是 λ 与 h^2 的正則函数(譬如参看本丛书《常微分方程》)。

另外，方程(33.6)的运算子 $\frac{d^2}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)$ 是关于 z 的偶函数。所以如果有一个解为 $w(z)$，那么 $w(-z)$ 也就必然是方程的解，于是 $w(z)\pm w(-z)$ 也非是方程的解不可[②]。因此我們可以理解，方程(33.6)同时具有偶函数与奇函数的解，这种解乘以适当的常数后，可以認为是满足下列条件的函数，即

$$\left.\begin{array}{lll} w_{\rm I}(z)=w_{\rm I}(-z), & w_{\rm I}(0)=1, & w_{\rm I}'(0)=0, \\ w_{\rm II}(z)=-w_{\rm II}(-z), & w_{\rm II}(0)=0, & w_{\rm II}'(0)=1. \end{array}\right\} \quad (34.1)$$

现在考虑下列的微分方程

$$\frac{d^2w_{\rm I}}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w_{\rm I}=0,$$

$$\frac{d^2w_{\rm II}}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w_{\rm II}=0.$$

把两个方程分别乘以 $-w_{\rm II}$ 及 $w_{\rm I}$，然后相加，把結果积分以后，可以了解 $w_{\rm I}\frac{dw_{\rm II}}{dz}-w_{\rm II}\frac{dw_{\rm I}}{dz}$ 必然是常数。如果利用函数在 $z=0$ 处的条件来决定这个常数，那就可得[③]

$$w_{\rm I}\frac{dw_{\rm II}}{dz}-w_{\rm II}\frac{dw_{\rm I}}{dz}=1. \quad (34.2)$$

另外，由于运算子 $\frac{d^2}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)$ 对于 z 来説，以 π 为它的周期，故此可以理解，$w_{\rm I}(z\pm\pi)$，$w_{\rm II}(z\pm\pi)$ 也都是(33.6)的解，因此这种函数必然是 $w_{\rm I}(z)$ 与 $w_{\rm II}(z)$ 的某一种綫性組合，即有

$$w_{\rm I}(z\pm\pi)=Aw_{\rm I}(z)+Bw_{\rm II}(z).$$

我們利用这个公式，以及它对 z 的微分式在 $z=0$ 处的值計算出系数 A,B 后，就得到

$$w_{\rm I}(z\pm\pi)=w_{\rm I}(\pi)w_{\rm I}(z)\pm w_{\rm I}'(\pi)w_{\rm II}(z), \quad (34.3)$$

同样地能有

$$w_{\rm II}(z\pm\pi)=\pm w_{\rm II}(\pi)w_{\rm I}(z)+w'_{\rm II}(\pi)w_{\rm II}(z). \qquad (34.4)$$

在(34.3)与(34.4)中取負号,并設 $z=\pi$, 就有

$$1=w_{\rm I}(\pi)^2-w'_{\rm I}(\pi)w_{\rm II}(\pi); \qquad (34.5)$$

$$0=w_{\rm II}(\pi)\{-w_{\rm I}(\pi)+w'_{\rm II}(\pi)\}. \qquad (34.6)$$

由(34.6)就得到 $w_{\rm I}(\pi)=w'_{\rm II}(\pi)$, 或是 $w_{\rm II}(\pi)=0$. 現在先討論后者的情形。如果 $w_{\rm II}(\pi)=0$, 則由(34.5)就有 $w_{\rm I}(\pi)=\pm1$. 把这个結果代入(34.2),就有 $w'_{\rm II}(\pi)=\pm1$,于是无論在那种符号的情形下,都归結成为

$$w_{\rm I}(\pi)=w'_{\rm II}(\pi). \qquad (34.7)$$

此外,如果在(34.3)与(34.4)中仍取負号,并設 $z=\frac{\pi}{2}$,則有

$$w_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)=w_{\rm I}(\pi)w_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w'_{\rm I}(\pi)w_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad (34.8)$$

$$w_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right)=w_{\rm II}(\pi)w_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w'_{\rm II}(\pi)w_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (34.9)$$

同样地,把原式微分后再令 $z=\frac{\pi}{2}$,就有

$$-w'_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)=w_{\rm I}(\pi)w'_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w'_{\rm I}(\pi)w'_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad (34.10)$$

$$w'_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-w_{\rm II}(\pi)w'_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)+w'_{\rm II}(\pi)w'_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (34.11)$$

对(34.8)乘以 $w'_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 减去以 $w_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)$乘(34.10)的式子,并且注意根据(34.2)所得到的关系 $w_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, 就有

$$w'_{\rm I}(\pi)=2w_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{\rm I}\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (34.12)$$

同样地,由(34.9)及(34.11)有

$$w_{II}(\pi)=2w_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (34.13)$$

另一方面，如以 $w'_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 乘(34.8)，减去以 $w_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 乘(34.10)，则得

$$w_I(\pi)=w_I\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)+w_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_I\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

把这个公式与 $1=w_I\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)-w_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_I\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 相加，或是相减，就得下面的关系式

$$w_I(\pi)+1=2w_I\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad (34.14)$$

$$w_I(\pi-1)=2w_{II}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_I\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (34.15)$$

这种公式将在下一节讲周期解的分类时，起重要的作用。

另外我們还要注意一点，即这里的 $w_I\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$w'_I\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdots$ 等等都是 λ 与 h^2 的正則函数。

§35　Floquet 定理，固有指数

由于方程(33.6)的系数是以 π 为周期的函数，所以如(33.6)有非恒等于 0 的解 $w(z)$，則 $w(z+\pi)$ 必然也是同一微分方程的解。現在假設 σ 是某一待定的常数，我們探求一下满足条件

$$w(z+\pi)=\sigma w(z) \qquad (35.1)$$

的解。由于解是被作为解的函数在某一点的函数值，以及导函数在同一点的函数值所决定的，所以(35.1)与下列的关系等价：

$$w(\pi)=\sigma w(0), \qquad w'(\pi)=\sigma w'(0).$$

把 $w(z)$ 用基本解 $w_I(z)$ 与 $w_{II}(z)$ 来表示[4]，如为 $Aw_I(z)+Bw_{II}(z)$，那么上面的条件可以写成

$$(w_{\rm I}(\pi)-\sigma)A+w_{\rm II}(\pi)B=0,$$
$$w'_{\rm I}(\pi)A+(w'_{\rm II}(\pi)-\sigma)B=0.$$

消去 A, B 以后，并且利用(34.7)及(34.2)，就得到了 σ 所满足的方程[5]

$$\sigma^2-2w_{\rm I}(\pi)\sigma+1=0. \tag{35.2}$$

令

$$\sigma=e^{i\pi\nu}, \tag{35.3}$$

则可把上式写成[6]

$$\cos\pi\nu=w_{\rm I}(\pi;\ \lambda,\ h^2). \tag{35.4}$$

满足(35.4)的 ν 值，对于参数值 λ 与 h^2，叫做固有指数。根据(35.4)可以看到，ν 是固有指数，$2l\pm\nu$(l 整数)也是固有指数。因此，如果 ν 是固有指数，即对于已給的 λ 及 h^2，它满足(35.4)，那么就存在着 Mathieu 方程的解，这个解非恒等于 0，但是满足条件

$$w(z+\pi)=e^{i\pi\nu}w(z). \tag{35.5}$$

这种样子的解叫做 Floquet 解(在量子物理学中这种解称为 Bloch 解)。

满足(35.5)的函数 $w(z)$ 可以有下面的写法，即如果 $u(z)$ 是某一个以 π 为周期的函数，则

$$w(z)=e^{i\nu z}u(z). \tag{35.6}$$

又如果 l 是一个任意整数，则 e^{2ilz} 也是以 π 为周期的解，如果把这个 $w(z)$ 写成

$$w(z)=e^{i(\nu+2l)z}\cdot e^{-2ilz}u(z),$$

那就是說在(35.6)中允許以 $\nu+2l$ 代替 ν 来使用，即 ν 是不完全确定的，而允許作 $+2l$ 的变动，利用这个性质，我們可以設 $-1<\nu\leqslant 1$，这样规定了的指数叫做换算固有指数。

現在我們仍然利用沒有换算的固有指数来研究进一步的性質。由于 $w(z)$ 是 λ 及 h^2 的連續函数，并且利用当 $h=0$ 时，解具有

非常簡单的形状

$$w(z)=Ce^{i\alpha z}+De^{-i\alpha z} \tag{35.7}$$

$(\alpha^2=\lambda)$的这个事实。为了这样的解能够成为 Floquet 解，那么 α 一定不能是整数，并且$CD=0$，即 $w(z)$ 必定是单项的指数函数。不失去問題的一般性可以假設 $w(z)\propto e^{i\alpha z}$，此外，要使这种解属于一个固有指数 ν，那么一定有 $\alpha=\nu+2l$(l 整数)，这样，我們就定义满足关系[7]

$$\lim_{h^2\to 0} w(z)=e^{i\nu z} \tag{35.8}$$

的 Mathieu 方程的解叫做次数为 ν 的 Mathieu 函数，并且遵循 Meixner 的建議，把它記作 $\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$。这里可以不必写出参数 λ，因为根据条件(35.4)，λ 可以根据 ν 与 h^2 完全决定。这样的 ν，根据上面的解釋，实际就是沒有换算过的固有指数。

如果在(35.7)中 α 是整数，那么解可以写成 $e^{i\alpha z}\cdot(C+De^{-2i\alpha z})$，这时即使 $CD\neq 0$，也能为 Floquet 解。故此在这种情形中，$\lim\limits_{h^2\to 0} w(z)$ 不能是一种指定的函数。由于这个緣故，所以我們在 ν 不是整数的情形下，象上面所作的定义一样，规定 $\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ 是 ν 次的Mathieu 函数，但是当 ν 是整数时，那就必須另行寻找别种样子的解。

§36　解的稳定与不稳定

当 $w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)$不等于 ±1 时，满足(35.4)的 ν 不能是整数。这时，$\mathrm{me}_\nu(z,h^2)$ 与 $\mathrm{me}_{-\nu}(z,h^2)$就是两个綫性独立的解，从而形成了方程的基本解。

如果 h^2 与 λ 都是实数，則 $w_{\mathrm{I}}(\pi;\lambda,h^2)$是实的。这时，根据它的絕对值比 1 大或是比 1 小，使得解的性质根据下面述說的理論，有着非常显著的差异。

(I) 当 $|w_1(\pi;\lambda,h^2)|>1$ 时，从 (35.4) 可知 ν 必是純虛数。設 $\nu=\pm i\tau(\tau>0)$，这时两个独立的解是 $\mathrm{me}_{i\tau}(z;h^2)$ 与 $\mathrm{me}_{-i\tau}(z;h^2)$，并且由于成立着关系式

$$\mathrm{me}_{\pm i\tau}(z+n\pi;h^2)=e^{\mp n\tau\pi}\mathrm{me}_{\pm i\tau}(z;h^2),$$

所以函数 $\mathrm{me}_{i\tau}(z;h^2)$ 当 $z\to-\infty$ 时，以及 $\mathrm{me}_{-i\tau}(z;h^2)$ 当 $z\to+\infty$ 时，它們都按指数方式趋于无穷大。于是在 $-\infty\leqslant z\leqslant+\infty$ 中不存在有界的解。在这种情形下我們說：解是不稳定的，在 (λ,h^2) 的坐标平面上，滿足这种情形的点 (λ,h^2) 所构成的区域，叫做不稳定区域。

(II) 当 $|w_I(\pi;\lambda,h^2)|<1$ 时，从 (35.4) 可以决定 ν，ν 为实数。在这种情形下，对应于固有指数 ν 与固有指数 $-\nu$ 有两个基本解，但是由于 $|e^{\pm i\pi\nu}|=1$，所以一切的解在 $-\infty\leqslant z\leqslant+\infty$ 中都是有界的。这时我們說：解是稳定的，滿足这种情形的点 (λ,h^2) 所构成的区域叫做稳定区域。

(III) 当 $|w_I(\pi;\lambda,h^2)|=1$ 时，如果 $w_I(\pi;\lambda,h^2)=+1$ 的情形可以决定 ν，ν 是偶数，如果在 $w_I(\pi;\lambda,h^2)=-1$ 的情形也可以决定 ν，ν 是奇数，这时，$\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ 在两种情形中分别是以 π 及 2π 为周期的周期函数，无疑地它們都是有界的。但是在这种情形中，微分方程的第二个解不是有界函数。

在这个时候，有 $w_I(\pi)=w'_{II}(\pi)=\pm1$，卽根据 (34.5) 有 $w'_I(\pi)=0$，或是 $w_{II}(\pi)=0$。如果是 $w'_I(\pi)=0$，那么 $w_I(z)$ 就是 Floquet 解。如果 $w_{II}(\pi)=0$，那么 $w_{II}(z)$ 是 Floquet 解。卽这两种情形的 Floquet 解分别是偶函数或是奇函数。首先考虑 $w'_I(\pi)=0$ 的情形，对应于 $w_I(\pi)=\pm1$，有 $w_I(z+\pi)=\pm w_I(z)$[2]，此外，考虑了 $w_{II}(z+\pi)$ 与它的导数在 $z=0$ 处的值后，就有

$$w_{II}(z+\pi)=w_{II}(\pi)w_I(z)\pm w_{II}(z). \tag{36.1}$$

現在令 $f(z)\equiv w_{II}(z)\mp\frac{z}{\pi}w_{II}(\pi)w_I(z)$，由(36.1)，就有 $f(z+\pi)=w_{II}(z+\pi)-\left(\frac{z}{\pi}+1\right)w_{II}(\pi)w_I(z)=\pm w_{II}(z)-\frac{z}{\pi}w_{II}(\pi)w_I(z)=\pm f(z)$。即 $f(z)$ 是满足关系式 $f(z+\pi)=\pm f(z)$ 的函数，而方程的第二个解可以写成

$$w_{II}(z)=\pm\frac{w_{II}(\pi)}{\pi}zw_I(z)+f(z). \qquad (36.2)$$

根据这种形式,这个解显然不能是有界的[9]。同样,如果 $w_{II}(\pi)=0$，則 $w_{II}(z)$ 是 Floquet 解,对应于 $w_I(\pi)=\pm1$ 有 $w_{II}(z+\pi)=\pm w_{II}(z)$，这时第二个解能写成

$$w_I(z)=\pm\frac{w_I'(\pi)}{\pi}zw_{II}(z)+g(z),\ g(z+\pi)=\pm g(z) \qquad (36.3)$$

的形状,从而这个解也不是有界的。

总而言之，相当于稳定区域与不稳定区域的境界情形(111)，存在着一个 Floquet 解，它是有界的,而方程一切其他的解都不是有界的。

最后我們述說几点有关 $\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ 的性質。第一个关系是

$$\mathrm{me}_\nu(-z;h^2)=\mathrm{me}_{-\nu}(z;h^2). \qquad (36.4)$$

对于这个关系式的証明，首先注意到当用 $z\to-z$ 变换变数时微分方程是不变的，即 $\mathrm{me}_\nu(-z;h^2)$ 与 $\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ 对于相同的 λ 与 h^2 都是 Mathieu 方程的解,此外再根据它是对应于固有指数 $-\nu$ 的 Floquet 解,于是立刻得到了上式的証明。

下面我們再証明一下，如果 h^2 是实数,那么当 ν 也是实数时，λ 必是实数。

証明　如果对于任意的 λ，有 h^2 与固有指数 ν 都是实数，把 Floquet 解 $\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ 記作 $w(z)$，則有

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=0. \qquad (36.5)$$

取这式的共轭复数,有

$$\frac{d^2\bar{w}}{dz^2}+(\bar{\lambda}-2\bar{h}^2\cos 2z)\bar{w}=0. \tag{36.6}$$

現在对(36.5)乘以 $\bar{w}$,对(36.6)乘以 w,并把两式相减,再对 z 在区間 $(0,\pi)$ 中积分,則有

$$\left(w\frac{d\bar{w}}{dz}-\bar{w}\frac{dw}{dz}\right)\Big|_0^{\pi}=(\lambda-\bar{\lambda})\int_0^{\pi}\bar{w}w\,dz.$$

利用关系式 $w(z+\pi)=e^{i\pi\nu}w(z)$, $\bar{w}(z+\pi)=e^{-i\pi\bar{\nu}}\bar{w}(z)$,以及它們的微分关系式,就能証明等式的左边等于0. 卽 $\lambda=\bar{\lambda}$,故此 λ 必是实数。

由这个事实,立刻能够导出下面的結果,卽当 h^2 是实数时,对于实数的 ν, $\mathrm{me}_\nu(z;h^2)$ 与 $\mathrm{me}_{-\nu}(z;h^2)=\mathrm{me}_\nu(-z;h^2)$ 必需是相互共軛的复数。于是如果設

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{me}_\nu(z;h^2)&=\mathrm{ce}_\nu(z;h^2)+i\,\mathrm{se}_\nu(z;h^2),\\ \mathrm{me}_{-\nu}(z;h^2)&=\mathrm{ce}_\nu(z;h^2)-i\,\mathrm{se}_\nu(z;h^2),\end{aligned}\right\} \tag{36.7}$$

那么 $\mathrm{ce}_\nu(z;h^2)$ 与 $\mathrm{se}_\nu(z;h^2)$ 都必須是实函数,并且分別是偶函数与奇函数,卽

$$\mathrm{ce}_\nu(-z;h^2)=\mathrm{ce}_\nu(z;h^2),\ \mathrm{se}_\nu(-z;h^2)=-\mathrm{se}_\nu(z;h^2). \tag{36.8}$$

当 $h\to 0$ 时,明显地 $\mathrm{me}_\nu,\mathrm{ce}_\nu,\mathrm{se}_\nu$ 分别归結为函数 $e^{i\nu z},\cos\nu z,\sin\nu z$.

§37 ν 是整数的情形(1),周期解的分类

对于 Mathieu 函数的各种应用,譬如研究有周期性变化的彈性力作用下的系統的振动問題,或是决定晶体内电子的波动力学能带問題,其中最为重要的,是对于已給的 h^2,需要了解 λ 所在的稳定区域。这个問題自然地会归結为需要研究 (λ,h^2) 平面上稳定区域与不稳定区域的境界曲綫,卽方程

$$w_1(\pi;\lambda,h^2)=\pm 1 \tag{37.1}$$

所代表的曲綫。这个問題与固有指数 ν 是整数的 Mathieu 方程的解的研究有密切关系。

当 ν 是整数时, Mathieu 方程的 Floquet 解具有周期为 2π 或 π. 这种样子的解我們称之为周期解。根据 §36 的討論可以看到,除去 $h=0$ 的情形,如果 Mathieu 方程有一个周期解,那么它的另一个独立的解必定不是周期解。

現在我們利用对称性来对周期解分类。首先由于 Mathieu 方程的运算子 $\frac{d^2}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)$ 对于变换 $z\to -z$ 及 $z\to\pi-z$ 是不变的。这个事实如果我們用图 37.1 中落在单位圓上的点 z 来描述,就是說, Mathieu 方程对于直徑 AB 的反射 σ_0 以及对于直徑 CD 的反射 $\sigma_{\frac{\pi}{2}}$ 是不变的。这就是說,对于 Mathieu 方程以 $E, \sigma_0, \sigma_{\frac{\pi}{2}}, \sigma_0\sigma_{\frac{\pi}{2}}$ 四个元素所成的群中任意一元素来作用时,方程本身不变 ($\sigma_0\sigma_{\frac{\pi}{2}}$ 即为对角度 π 的旋轉,故此即为变换 $z\to z+\pi$)。这个群在結晶学中叫做 C_{2v} 群。另一方面, Mathieu 方程的周期解 w 在图中的圓周上是单值函数,那么对这个解 w 作用了上面所說的群的元素后,所得到的所有經过变换后的函数,一定表示了这个群的既約表現⑩。这一点我們可以由下面的討論看清楚。設 S 是 C_{2v} 的任一个元素, w 是对应于 λ, h^2 的周期解,那么对 w 作用了变换 S 后,所得到的函数 Sw 也应該是对应于同一組 λ, h^2 值的周期解,但因对应于同一組 λ, h^2 的只能有一个独立的周期解,所以非成立

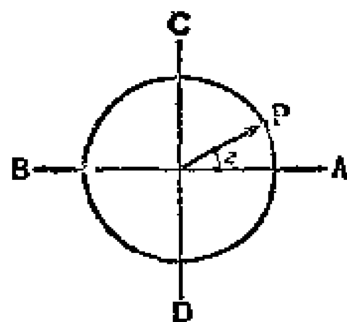


图 37.1

$$Sw=c_S w$$

不可,故此与 S 对应着的数 c_S 就构成了群 C_{2v} 的一維表現,而一維表現必然也就是既約表現⑪。

另外，对于群 C_{2v} 的既約表現，根据把 σ_0，$\sigma_{\frac{\pi}{2}}$ 分别对应 ± 1，共有四种不同的組合法，从而可以分成四种可能的类型。对于这些表現，可以根据表 37.1 的内容了解它的具体形状，我們記这四种表現为 A_+, A_-, B_+, B_-❶. 由这里可以看到,对于表現 A_+, B_+ 具有周期为 π 的周期解,即 $w(z+\pi)=w(z)$,相反,对于表現 A_-, B_- 具有周期为 2π 的周期解，并且当变数增加 π 时，函数应該变号，即 $w(z+\pi)=-w(z)$. 这两种情形分别对应于 ν 是偶数以及奇数的情形，即对应于 $w_1(\pi)=+1$ 以及 $w_1(\pi)=-1$ 的情形。此外在表現 A_+, A_- 中 $w_{\rm I}(z)$ 是周期解，而在表現 B_+, B_- 中 $w_{\rm II}(z)$ 是周期解。另外在 A_+, B_- 中有 $w'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，而在 A_-, B_+ 中有 $w\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

表 37.1 群 C_{2v} 的既約表現

表現 \ 元素	E	σ_0	$\sigma_{\frac{\pi}{2}}$	$K_\pi=\sigma_0\sigma_{\frac{\pi}{2}}$
A_+	1	1	1	1
B_+	1	-1	-1	1
A_-	1	1	-1	-1
B_-	1	-1	1	-1

再者,如果設 $w_{\rm I}(\pi)=+1$, 则由(34.15)知道 $w_{\rm I}'\left(\frac{\pi}{2}\right)w_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,并当 $w_{\rm I}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 时,周期解 $w_{\rm I}(z)$ 属于类型 A_+,当 $w_{\rm II}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 时,周期解 $w_{\rm II}(z)$ 属于类型 B_+. 同样地,当 $w_{\rm I}(\pi)=-1$ 时，则由

❶ 这种对 C_{2v} 群表現的叫法，与普通所用的不同，通常叫这里的 A_+, A_-, B_+, B_- 为 A_1, B_2, A_2, B_1.

(34.14) 知道 $w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)w'_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. 如果 $w_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, 那么周期解 $w_{\mathrm{I}}(z)$ 属于 A_- 型, 如果 $w'_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, 那么周期解 $w_{\mathrm{II}}(z)$ 属于 B_- 型,这些結果通常可以用下面的表来表示。

型	周　期	奇　偶	周期解	特　别　的　函　数　值	
A_+	π	偶	$w_{\mathrm{I}}(z)$	$w(\pi)=w(0)$	$w'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
B_+	π	奇	$w_{\mathrm{II}}(z)$	$w(\pi)=-w(0)=0$	$w\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
A_-	2π	偶	$w_{\mathrm{I}}(z)$	$w(\pi)=-w(0)$	$w\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
B_-	2π	奇	$w_{\mathrm{II}}(z)$	$w(\pi)=w(0)=0$	$w'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

在 $h=0$ 的情形，这里所說的类型 A_+, B_+, A_-, B_- 所表示的解，分别成为 $\cos 2mz$, $\sin 2mz$, $\cos(2m+1)z$, $\sin(2m+1)z$, $(m=0, 1, 2, \cdots)$[12]。并且遵循 Whittaker 的作法，把当 $h\to 0$ 时，归結为这四种函数的周期解分别記作，$\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)$, $\mathrm{se}_{2m}(z;h^2)$, $\mathrm{ce}_{2m+1}(z;h^2)$, $\mathrm{se}_{2m+1}(z;h^2)$. 即一般成立着关系式

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \mathrm{ce}_n(z;\,h^2)=\cos nz, & n=0,1,2,\cdots, \\ \lim\limits_{h\to 0} \mathrm{se}_n(z;\,h^2)=\sin nz; & n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{37.2}$$

由于 $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ 与 $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ 都是具有周期性的解析函数，所以可以展开成为 Fourier 級数[13]，那么对于 A_+, A_-, B_+, B_- 四种表現，由于它們有着不同的对称性，所以可以理解，它們的 Fourier 展开式必取下面的形状，即

$$A_+\text{ 型:}\qquad \mathrm{ce}_{2m}(z;\,h^2)=\sum_{s\geqslant 0}^{\infty} A_{2s}^{2m}(h^2)\cos 2sz, \tag{37.3}$$

$$A_-\text{ 型:}\qquad \mathrm{ce}_{2m+1}(z;\,h^2)=\sum_{s\geqslant 0}^{\infty} A_{2s+1}^{2m+1}(h^2)\cos(2s+1)z, \tag{37.4}$$

$$B_+ \text{ 型}: \quad \mathrm{se}_{2m}(z;\,h^2)=\sum_{s=0}^{\infty}B_{2s}^{2m}(h^2)\sin 2sz, \tag{37.5}$$

$$B_- \text{ 型}: \quad \mathrm{se}_{2m+1}(z;\,h^2)=\sum_{s=0}^{\infty}B_{2s+1}^{2m+1}(h^2)\sin(2s+1)z. \tag{37.6}$$

因为通常 $h\to 0$ 的极限的情形必须与(37.2)一致,所以有下面的关系式[19]

$$\lim_{h\to 0}A_r^n(h^2)=\lim_{h\to 0}B_r^n(h^2)=\delta_{nr}. \tag{37.7}$$

我們如果把 λ 考虑成为 h^2 的函数,一般对于函数 $\mathrm{ce}_n(z;\,h^2)$ 总用写法 $\lambda=\lambda_n^c(h^2)$,对于函数 $\mathrm{se}_n(z;\,h^2)$ 用写法 $\lambda=\lambda_n^s(h^2)$,并且当 $h^2\to 0$ 时,有

$$\lim_{h\to 0}\lambda_n^c(h^2)=\lim_{h\to 0}\lambda_n^s(h^2)=n^2,$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \tag{37.8}$$

在这种极限情形,由于 $\lambda=n^2$,所以存在着两个独立无关的周期解。但是一般当 $h\neq 0$ 时,根据前面的討論可以理解,不能发生象現在这种退化情形所形成的关系。 卽对于各个整数値 n 来說,曲綫 $\lambda=\lambda_n^c(h^2)$ 与曲綫 $\lambda=\lambda_n^s(h^2)$ 在 $h^2\neq 0$ 的区域内一般既不能相交,也不相切。

現在我們討論一下 h^2 的符号改变以后,Mathieu 函数之間的关系。首先应該注意,Mathieu 方程对于变换

$$z\to\frac{\pi}{2}-z;\quad h^2\to -h^2 \tag{37.9}$$

是不变的这个事实,卽如果对 $\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,\,h^2\right)$,把 h^2 换成 $-h^2$,則它仍是 Mathieu 方程的周期解,于是 $\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,\,h^2\right)$ 必是 $\mathrm{ce}_{2m}(z,\,-h^2)$ 乘以某一个常数。但是到現在为止我們还沒有定义过 $\mathrm{ce}_{2m}(z,\,-h^2)$ 的位相,所以我們可以看到一定要要求成立下面的关系,卽

$$\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,\ h^2\right)=(-1)^m\mathrm{ce}_{2m}(z,\ -h^2). \tag{37.10}$$

同样的推論可以适用于其他类型的函数。事实上，当施行变换 $z\to\frac{\pi}{2}-z$ 时，对于 A_+，B_+ 型的解不发生变化，但是对 A_-，B_- 类型的解，則发生了 $A_-\rightleftarrows B_-$ 的变化，注意了这个事实后，必然会得到結果

$$\mathrm{ce}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,\ h^2\right)=(-1)^m\mathrm{se}_{2m+1}(z,\ -h^2), \tag{37.11}$$

$$\mathrm{se}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}-z,\ h^2\right)=-(-1)^m\mathrm{se}_{2m}(z,\ -h^2), \tag{37.12}$$

$$\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,\ h^2\right)=(-1)^m\mathrm{ce}_{2m+1}(z,\ -h^2). \tag{37.13}$$

根据上面的結果，我們就知道在$(\lambda,\ h^2)$平面上，曲綫 $\lambda=\lambda^c_{2m}(h^2)$ 与 $\lambda=\lambda^s_{2m}(h^2)$ 对于 λ 軸是对称的。但是曲綫 $\lambda=\lambda^c_{2m+1}(h^2)$ 与 $\lambda=\lambda^s_{2m+1}(h^2)$ 都在 λ 軸上交叉，并且对于以 λ 軸为对称轴的反射，它們相互交換。即

$$\lambda^c_{2m}(-h^2)=\lambda^c_{2m}(h^2),\quad \lambda^s_{2m}(-h^2)=\lambda^s_{2m}(h^2),$$
$$\lambda^c_{2m+1}(-h^2)=\lambda^s_{2m+1}(h^2). \tag{37.14}$$

§38 ν 是整数的情形(2)，函数 $\lambda(h^2)$，$A(h^2)$，$B(h^2)$的决定

为了具体地得出 $\lambda(h^2)$ 以及展开式系数 $A(h^2)$ 及 $B(h^2)$ 的形状，我們考虑 A_+ 型的解(37.3)作为例子。

首先，一般可令

$$w=\sum_{s=0}^{\infty}A_{2s}\cos 2sz,$$

把这个式子代入 Mathieu 方程中，就得到

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=\sum_s(\lambda-4s^2)A_{2s}\cos 2sz$$

$$-h^2\sum A_{2s}\{\cos 2(s-1)z+\cos 2(s+1)z\},$$

这里设 $\cos 2sz$ 的系数为 0，就得到下面这些决定各 A_s 的关系式

$$\left.\begin{aligned}A_{2(s-1)}+\left(\frac{4s^2}{h^2}-\frac{\lambda}{h^2}\right)A_{2s}+A_{2(s+1)}=0,\quad s=1,2,3,\cdots,\\ -\frac{\lambda}{h^2}A_0+2A_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{38.1}$$

把这些方程看成等差方程，为了要得到方程的解，令

$$\frac{A_{2(s+1)}}{A_{2s}}=c_s,\tag{38.2}$$

则上面的方程化成为

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{c_{s-1}}+\frac{4s^2-\lambda}{h^2}+c_s=0,\quad s=1,2,\cdots,\\ c_0=\frac{\lambda}{2h^2}.\end{aligned}\right\}\tag{38.3}$$

由(38.3)就能导出下面的连分数式[1]

$$(A_+)\qquad \lambda=-\frac{2h^4|}{|4-\lambda}-\frac{h^4|}{|16-\lambda}-\frac{h^4|}{|36-\lambda}-\cdots,\tag{38.4}$$

这个就是决定函数 $\lambda_{2m}^c(h^2)$ 的条件。同样地，对于其他的类型，有相应的公式如下

$$(A_-)\quad \lambda_{2m+1}^c(h^2):\ \lambda=1+h^2+\frac{h^4|}{|9-\lambda}-\frac{h^4|}{|25-\lambda}-\cdots,\tag{38.5}$$

$$(B_+)\quad \lambda_{2m}^s(h^2):\quad \lambda=4-\frac{h^4|}{|16-\lambda}-\frac{h^4|}{|36-\lambda}-\cdots,\tag{38.6}$$

$$(B_-)\quad \lambda_{2m+1}^s(h^2):\ \lambda=1-h^2-\frac{h^4|}{|9-\lambda}-\frac{h^4|}{|25-\lambda}-\cdots.\tag{38.7}$$

在 $|h^2|$ 相当小的范围中，$\lambda(h^2)$ 可以便利地展开成为 h^2 的整幂級数。根据(37.14)可以看到，$\lambda_{2m}(h^2)$ 可以表示成为 h^4 的整幂級数，$\lambda_{2m+1}(h^2)$ 可以表示成为 h^2 的整幂級数，并且 $\lambda_{2m+1}^c(h^2)$ 与

$\lambda^{s}_{2m+1}(h^2)$ 的差别仅仅是对于 h^2 的奇数乘幂的项具有不同的符号而已，这些級数的起始几項可以利用上面的連分式求出。

下面作为例題，我們講解一下，如何同时求出适用于在量子力学中慣用的摄动法中的解，以及解的固有值。

对于 Mathieu 方程，我們同时把

$$\lambda=\sum_{s=0}^{\infty}a_s h^{2s},\quad a_0=n^2 \tag{38.8}$$

及

$$w=\sum_{s=0}^{\infty}w_s h^{2s} \tag{38.9}$$

代入，則有

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w=\sum_s\left(\frac{d^2w_s}{dz^2}+a_0w_s\right)h^{2s}$$
$$+\sum_s\sum_r a_r w_{s-r}h^{2s}-2\cos 2z\sum_s w_s h^{2s+2}.$$

为了使这个式子能恒等于 0，必須設 h^{2s} 的系数为 0，卽有

$$\frac{d^2w_s}{dz^2}+n^2w_s=2\cos 2z\; w_{s-1}-\sum_{r=1}^{s}a_r w_{s-r},$$
$$s=1,\ 2,\ \cdots. \tag{38.10}$$

此外，如果对固有函数依据 $\int_{-\pi}^{+\pi}w^2dz=\pi$ 使之規格化，則有

$$\int_{-\pi}^{\pi}w_0^2dz=\pi \tag{38.11}$$

及

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=0}^{s}w_r w_{s-r}dz=0,\qquad s=1,\ 2,\ 3,\cdots. \tag{38.12}$$

現在我們考慮 $\lambda=\lambda_n^c(h^2)$ 以及 $w=\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ 的情形，这时令 $w_0=\cos nz$，并对方程 (38.10) 乘以 w_0，然后由 $-\pi$ 到 π 积分，于是等式的左边成为

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_0\left(\frac{d^2w_s}{dz^2}+n^2w_s\right)dz=\left(w_0\frac{dw_s}{dz}-w_s\frac{dw_0}{dz}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} w_s\left(\frac{d^2w_0}{dz^2}+n^2w_0\right)dz=0,$$

并且根据等式的右边得到

$$\pi a_s=2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2z\cos nz\cdot w_{s-1}\,dz$$

$$-\sum_{r\geq 1}^{s-1} a_r\int_{-\pi}^{\pi} w_{s-r}\cos nz\,dz. \qquad (38.13)$$

因此，如果知道了 $w_0, w_1, \cdots, w_{s-1}$; a_0, a_1, $\cdots$, a_{s-1} 以后，就能决定 a_s，进一步再用 (38.10) 就能决定 w_s。不过这时由于用微分方程来决定 w_s，所以余一个不定的項 $A\cos nz+B\sin nz$，但是由于 w 是偶函数，所以必然是 $B=0$，至于 A 可以用 (38.12) 来决定。这样，我們就可以逐次地来求得 a_s, w_s, a_{s+1}, $w_{s+1}, \cdots$，于是得到了下面的結果⑩:

$$\lambda_n^c(h^2)=n^2+\frac{1}{2(n^2-1)}h^4+\cdots,\quad n\geq 3, \qquad (38.14)$$

$$ce_n(z;h^2)=\cos nz+\left\{\frac{\cos(n-2)z}{4(n-1)}-\frac{\cos(n+2)z}{4(n+1)}\right\}h^2+\cdots,$$

$$n\geq 2. \qquad (38.15)$$

关于 $n=1$, 2 的几个起始的函数，为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^c(h^2)&=1+h^2-\frac{1}{8}h^4+\cdots,\\ \lambda_2^c(h^2)&=4+\frac{5}{12}h^4+\cdots,\end{aligned}\right\} \qquad (38.16)$$

$$ce_1(z;h^2)=\cos z-\frac{1}{8}\cos 3z\cdot h^2+\cdots, \qquad (38.17)$$

但是这几个公式不被包含在上面的一般公式之内。

同样地，能够导出

$$\lambda_n^s(h^2)=n^2+\frac{1}{2(n^2-1)}h^4+\cdots,\quad n\geqslant 3, \tag{38.18}$$

$$\mathrm{se}_n(z;\,h^2)=\sin nz+\left\{\frac{\sin(n-2)z}{4(n-1)}-\frac{\sin(n+2)z}{4(n+1)}\right\}h^2+\cdots,$$
$$n\geqslant 2, \tag{38.19}$$

补充公式为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1^s(h^2)&=1-h^2-\frac{1}{8}h^4+\cdots,\\ \lambda_2^s(h^2)&=4-\frac{1}{12}h^4+\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{38.20}$$

$$\mathrm{se}_1(z;\,h^2)=\sin z-\frac{1}{8}\sin 3z\cdot h^2+\cdots. \tag{38.21}$$

現在我們討論一下上面所得到的結果的意义。首先，λ_{2m}^c 与 λ_{2m}^s 直到 h^{4m-4} 的項，系数完全一致，仅在 h^{4m} 項的系数才显示出差别。此外，λ_{2m+1}^c 与 λ_{2m+1}^s 直到 h^{4m} 項，仅出現 h^2 的偶数乘幂項，h^2 的奇数乘幂項直到 h^{4m+2} 的項时才出現。这样就能知道，一般成立着

$$\lambda_n^c(h^2)-\lambda_n^s(h^2)=O(h^{2n}), \tag{38.22}$$

并且右边 h^{2n} 項的系数还是正的。

根据上面的結果，以及前面說过的事实，即如 $h\neq 0$，則不同的 $\lambda(h^2)$ 曲綫不能相交，因此一般地，能导出下面的結果：

当 $h^2>0$ 时，

$$\lambda_0^c<\lambda_1^s<\lambda_1^c<\lambda_2^s<\lambda_2^c<\lambda_3^s<\lambda_3^c<\cdots,$$

当 $h^2<0$ 时，

$$\lambda_0^c<\lambda_1^c<\lambda_1^s<\lambda_2^s<\lambda_2^c<\lambda_3^c<\lambda_3^s<\cdots. \tag{38.23}$$

这些不等式的几何意义，正如图 38.1 中的曲綫所表示的那样。

但是当 $h^2=0$ 时，那么对于任意的 $\lambda>0$，点 $(\lambda,\,0)$ 都落在稳定区域之內。如果 $h^2\neq 0$，那么对于满足条件：$\lambda<\lambda_0^c$，或 $\lambda_n^s<\lambda<\lambda_n^c(h^2>0)$ 或 $\lambda_n^c<\lambda<\lambda_n^s(h^2<0)$ 的这些 λ，点 $(\lambda,\,h^2)$ 属于稳定区

域，对其他的 λ，点都属于不稳定区域。我們在图 38.1 的 (λ, h^2) 面上，把稳定区域用阴影斜綫画出。

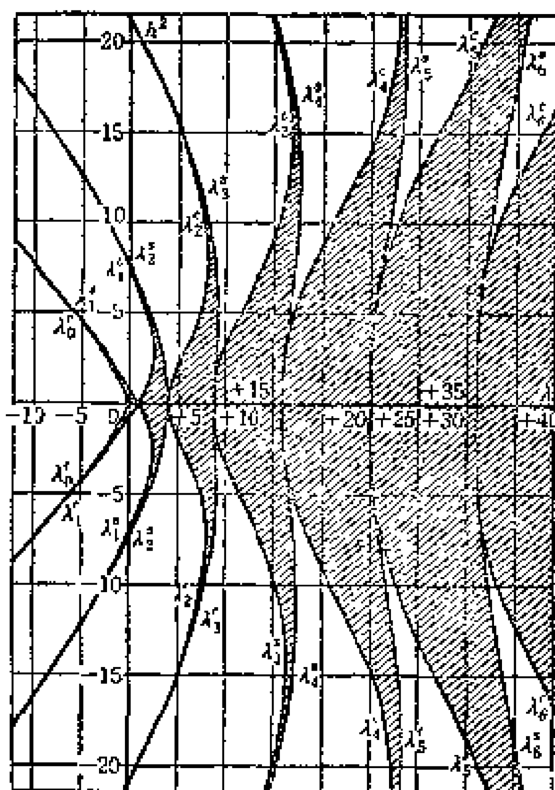


图 38.1

§39 积 分 方 程

把 Mathieu 方程写成 $L_z w+\lambda w=0$，并且对运算子 L_z 定义如下：

$$L_z \equiv \frac{d^2}{dz^2}-2h^2\cos 2z, \tag{39.1}$$

这样，就能得到下面的定理。

定理 設 $K(z, z')$ 是滿足下列偏微分方程

$$(L_z-L_{z'})K(z, z')=0 \tag{39.2}$$

的函数，$w(z')$ 是 Mathieu 方程

$$L_{z'}w+\lambda w=0 \tag{39.3}$$

的解，并且如果对于一切的 z，恒等地成立着下列关系

$$\left\{w(z')\frac{\partial}{\partial z'}K(z,z')-K(z,z')\frac{dw}{dz'}\right\}\Big|_a^b=0, \qquad (39.4)$$

則函数

$$f(z)=\int_a^b K(z,z')w(z')dz' \qquad (39.5)$$

对属于 $w(z)$ 的 λ 与 h^2，是 Mathieu 方程的解。

証明

$$\begin{aligned}L_z f(z)&=\int_a^b L_z K(z,z')w(z')dz'\\&=\int_a^b w(z')L_{z'}K(z,z')dz'\\&=\left\{w(z')\frac{\partial}{\partial z'}K(z,z')-K(z,z')\frac{dw}{dz'}\right\}\Big|_a^b\\&\quad+\int_a^b K(z,z')L_{z'}w(z')dz'\\&=-\lambda\int_a^b K(z,z')w(z')dz'\\&=-\lambda f(z).\end{aligned}$$

故 $f(z)$ 是 Mathieu 方程之解②。

这个定理之所以有重要的用处，就是因为对偏微分方程(39.2)，如果令 $z=i\xi$, $z'=\eta$，并把 (ξ,η) 解釋成为椭圆坐标，那么这个方程就归結成为 Helmholtz 方程。故此，相反地，我們允許任意地取一个 Helmholtz 方程的解，把解用椭圆坐标表示以后，再作变换 $\xi=-iz$, $\eta=z'$，然后在适当考虑了正則性的条件下，可以把这解当作定理中的 $K(z,z')$ 来使用。至于定理中的条件(39.4)，常常可以象下面这样地来使之满足，即通常認为 $K(z,z')$ 与 w 是关于 z' 的周期函数，于是可取由 a 到 b 的积分恰好是对 z' 作一个周期的积分即可，自然也可以設在积分路綫的两端 a 与 b 处，$K(z,z')$ 十分迅速地趋于 0，这样也能使条件得到满足。

在上面这些情形成立的时候，譬如 $f(z)$ 具有周期性的話（或是由其他的理由），就能說明 $f(z)$ 一定是 $w(z)$ 乘以某一个定数所得到的函数，假如这种情形成立时，我們就能由上面的定理得到 $w(z)$ 所应滿足的积分方程。

作为具体的例子，我們进行下面的計算。

取 Helmholtz 方程 $(\Delta+k^2)K=0$ 的解为

$$K=e^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}, \tag{39.6}$$

把它用椭圓坐标来表示，則有

$$K=e^{ikc(\cosh\xi\cos\eta\cos\alpha+\sinh\xi\sin\eta\sin\alpha)}.$$

根据上面說的办法，令 $\xi=-iz$, $\eta=z'$，并注意 $h=\dfrac{1}{2}kc$，則从(39.6)可得

$$K(\alpha;z,z')=e^{2ih\cos z\cos z'\cos\alpha-2h\sin z\sin z'\sin\alpha}. \tag{39.7}$$

根据上面的理論，对于这个 $K(z,z')$，令

$$A\mathrm{ce}_n(z)=\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\mathrm{ce}_n(z')dz',$$

这里的 A 是与 z 无关，但是依賴于 α 的数。由于等式右边的积分对于 z 与 α 是对称的，所以 A 可以表示成为 $\gamma_n\mathrm{ce}_n(\alpha)$ 的形状，这时 γ_n 是仅仅依賴于 h 的函数。即有

$$\gamma_n\mathrm{ce}_n(\alpha)\mathrm{ce}_n(z)=\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;z,z')\mathrm{ce}_n(z')dz'. \tag{39.8}$$

为了决定 γ_n，可以在 $n=$ 偶数时，令 $\alpha=0$ 及 $z=\dfrac{\pi}{2}$，这样，就有

$$\gamma_n\mathrm{ce}_n(0)\mathrm{ce}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ce}_n(z')dz'.$$

把 $\mathrm{ce}_n(z')$ 的 Fourier 級数(37.3)代入后，就有

$$\gamma_n\mathrm{ce}_n(0)\mathrm{ce}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi A_0^n. \tag{39.9}$$

把这个公式，代入到(39.8)之后，就得到了 $\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)$ 所滿足的积

分方程

$$2\pi A_0^{2m}\mathrm{ce}_{2m}(\alpha)\mathrm{ce}_{2m}(z)$$

$$=\mathrm{ce}_{2m}(0)\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;\ z,\ z')\mathrm{ce}_{2m}(z')dz'. \tag{39.10}$$

如果在(39.8)中 n 是奇数，对 z 微分以后，令 $\alpha=0$, $z=\frac{\pi}{2}$，从而来决定常数，就得到了

$$-2\pi ihA_1^{2m+1}\mathrm{ce}_{2m+1}(\alpha)\mathrm{ce}_{2m+1}(z)$$

$$=\mathrm{ce}_{2m+1}(0)\mathrm{ce}'_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;\ z,\ z')\mathrm{ce}_{2m+1}(z')dz'. \tag{39.11}$$

同样地，对于 $\mathrm{se}_{2m}(z)$ 以及 $\mathrm{se}_{2m+1}(z)$，成立着下列的积分方程

$$-2\pi ih^2B_2^{2m}\mathrm{se}_{2m}(\alpha)\mathrm{se}_{2m}(z)$$

$$=\mathrm{se}'_{2m}(0)\mathrm{se}'_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;\ z,\ z')\mathrm{se}_{2m}(z')dz', \tag{39.12}$$

$$2\pi hB_1^{2m+1}\mathrm{se}_{2m+1}(\alpha)\mathrm{se}_{2m+1}(z)$$

$$=\mathrm{se}'_{2m+1}(0)\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}K(\alpha;\ z,\ z')\mathrm{se}_{2m+1}(z')dz'. \tag{39.13}$$

在(39.10)，(39.11)，(39.12)，(39.13)中所用的积分方程的核 $K(\alpha;\ z,\ z')$ 通常为(39.7)中的函数。此外，对于这些积分方程，如果适当地修正核函数的形状，也可以得到其他积分区间的方程，譬如要得到关于区間 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的积分方程，只要取核函数为

$$4\cos(2h\cos z\cos z'\cos\alpha)\cosh(2h\sin z\sin z'\sin\alpha)$$

即可。

此外，这种积分方程的另外一种用处，就是应用这种积分方程，可以由 Mathieu 函数的一种級数展开式导出另一种級数展开式。作为例子，譬如考虑 $\mathrm{ce}_{2m}(z)$ 的积分方程

$$2\pi A_0^{2m}\mathrm{ce}_{2m}(z)=\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi}^{\pi}e^{2ih\cos z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')dz', \tag{39.14}$$

(这个方程可以在 (39.10) 中令 $\alpha=0$ 而得到)，现在把 $\mathrm{ce}_{2m}(z')$ 的 Fourier 級数(37.3)代入，由于这个 Fourier 級数对于 z' 是一致收敛的，所以可以进行逐项积分，而得到

$$\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)=\frac{1}{A_0^{2m}(h^2)}\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2};\ h^2\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s A_{2s}^{2m}(h^2)\cdot$$
$$\cdot J_{2s}(2h\cos z). \tag{39.15}$$

这里的 J_{2s} 代表的是 $2s$ 次的 Bessel 函数。关于积分的求法可以参看 §30.1。同样地，有下列的公式

$$\mathrm{ce}_{2m+1}(z;h^2)=-\frac{1}{hA_1^{2m+1}(h^2)}\mathrm{ce}'_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2};\ h^2\right)$$
$$\times\sum_{s>0}^{\infty}(-1)^s A_{2s+1}^{2m+1}(h^2)\cdot J_{2s+1}(2h\cos z), \tag{39.16}$$

$$\mathrm{se}_{2m}(z;h^2)$$
$$=\frac{1}{hB_2^{2m}(h^2)}\mathrm{se}'_{2m}\left(\frac{\pi}{2};\ h^2\right)\sin z\cdot\left\{-B_2^{2m}(h^2)J_1(2h\cos z)\right.$$
$$\left.+\sum_{s>1}^{\infty}(-1)^s(B_{2s}^{2m}(h^2)-B_{2s+2}^{2m}(h^2))\cdot J_{2s+1}(2h\cos z)\right\}, \tag{39.17}$$

$$\mathrm{se}_{2m+1}(z;h^2)$$
$$=\frac{1}{B_1^{2m+1}(h^2)}\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{\pi}{2};\ h^2\right)\sin z\cdot\left\{B_1^{2m+1}(h^2)J_0(2h\cos z)\right.$$
$$\left.+\sum_{s>1}^{\infty}(-1)^s(B_{2s+1}^{2m+1}(h^2)-B_{2s-1}^{2m+1}(h^2))\cdot J_{2s}(2h\cos z)\right\}. \tag{39.18}$$

§40 具有周期解的 Mathieu 方程的第二个解

对于周期的解，如果 λ 取固有值 λ_n^c 或是 λ_n^s，这时，相应的一个周期解为 $\mathrm{ce}_n(z)$ 或是 $\mathrm{se}_n(z)$。这种情形下可以取一个具有与周期解有相反奇偶性的解，作为方程的第二个解。第二个解的形状可

以根据(36.2)以及(36.3)而得到解答。故此

对于 $\lambda=\lambda_n^c(h^2)$ 的第二个解可以定义为

$$\mathrm{fe}_n(z;h^2)=c_n(h^2)\{z\,\mathrm{ce}_n(z;h^2)+f_n(z;h^2)\}, \qquad (40.1)$$

对于 $\lambda=\lambda_n^s(h^2)$ 的第二个解可以定义为

$$\mathrm{ge}_n(z;h^2)=s_n(h^2)\{z\,\mathrm{se}_n(z;h^2)+g_n(z;h^2)\}. \qquad (40.2)$$

这里

$$f_n(-z;h^2)=-f_n(z;h^2),\quad g_n(-z;h^2)=g_n(z;h^2).$$

現在函数 $f_{2m}(z;h^2)$ 与 $g_{2m}(z;h^2)$ 具有周期为 π，函数 $f_{2m+1}(z;h^2)$ 与 $g_{2m+1}(z;h^2)$ 当自变数增加 π 时，仅仅发生符号的变换。至于定数 $c_n(h^2)$ 与 $s_n(h^2)$ 沒有确定它們的必要性，因此我們仅假設它們滿足下面的条件，卽对于 $h^2\neq0$，$c_n(h^2)\neq0$，$s_n(h^2)\neq0$，$c_{2m}(h^2)$ 与 $s_{2m}(h^2)$ 都是 h^2 的偶函数，并且 $c_{2m+1}(-h^2)=s_{2m+1}(h^2)$。

至于周期函数 $f_n(z;h^2)$ 与 $g_n(z;h^2)$ 决定的方法，可以把(40.1)及(40.2)代入到 Mathieu 方程，并注意 $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ 与 $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ 是 Mathieu 方程的解，就得到了它們所滿足的非齐次方程

$$\frac{d^2}{dz^2}f_n(z;h^2)+\{\lambda_n^c(h^2)-2h^2\cos 2z\}f_n(z;h^2)$$
$$=-2\frac{d}{dz}\mathrm{ce}_n(z;h^2) \qquad (40.3)$$

及

$$\frac{d^2}{dz^2}g_n(z;h^2)+\{\lambda_n^s(h^2)-2h^2\cos 2z\}g_n(z;h^2)$$
$$=-2\frac{d}{dz}\mathrm{se}_n(z;h^2). \qquad (40.4)$$

要得到方程(40.3)与(40.4)的解，有下面这样两种方法。第一种方法是对方程左边的 $f_n(z;h^2)$ 及 $g_n(z;h^2)$ 假定它們分別可以展开成为由 cos 項或是 sin 項所組成的 Fourier 級数，然后把 $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ 及 $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ 的 Fourier 級数代入方程的右边，这样就能

决定 $f_n(z; h^2)$ 与 $g_n(z; h^2)$ 的 Fourier 級数的系数所应該满足的非齐次等差方程組，于是得到了求解的方法。第二种方法是把所求的解依照 Mathieu 方程的周期解(Floquet 解)而展开的方法。现在在下面把这种方法加以說明。

作为例题我們考虑(40.4)中 $n=2m$(偶数)的情形。由于函数 $\frac{d}{dz}\text{ce}_{2m}(z; h^2)$ 及 $\text{fe}_{2m}(z; h^2)$ 与函数 $\text{se}_{2r}(z; h^2)$ 具有相同的对称性，所以可以假設

$$-2\frac{d}{dz}\text{ce}_{2m}(z; h^2) = \sum_{r\geq 1}^{\infty} \varphi_{2r}^{2m}(h^2)\text{se}_{2r}(z; h^2), \qquad (40.5)$$

$$f_{2m}(z; h^2) = \sum_{r\geq 1}^{\infty} \Phi_{2r}^{2m}(h^2)\text{se}_{2r}(z; h^2). \qquad (40.6)$$

由于函数 $\text{se}_{2r}(z; h^2)$ $(r=1, 2, 3, \cdots)$ 組成了正交系，利用条件

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\text{se}_{2r}(z; h^2)]^2 dz = 1$$

使之規格化后，就能得到(40.5)展开式的系数，即

$$\varphi_{2r}^{2m}(h^2) = -\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dz}\text{ce}_{2m}(z; h^2)\cdot\text{se}_{2r}(z; h^2)\,dz.$$

再用积分中函数的 Fourier 級数的系数，就得到了下面的表达式

$$\varphi_{2r}^{2m}(h^2) = 2\sum_{s\geq 1}^{\infty}(2s)A_{2s}^{2m}(h^2)B_{2s}^{2r}(h^2). \qquad (40.7)$$

此外，如果把(40.6)与(40.5)代入(40.3)，并且注意 $\text{se}_{2r}(z; h^2)$ 是对于固有值 $\lambda_{2r}^{s}(h^2)$ 的 Mathieu 方程的解，就可以容易地决定 $\Phi_{2r}^{2m}(h^2)$。結果为

$$f_{2m}(z; h^2) = \sum_{r\geq 1}^{\infty} \frac{\varphi_{2r}^{2m}(h^2)}{\lambda_{2m}^{c}(h^2) - \lambda_{2r}^{s}(h^2)}\text{se}_{2r}(z; h^2). \qquad (40.8)$$

同样地，能够求出 $f_{2m+1}(z; h^2)$，$g_{2m}(z; h^2)$ 以及 $g_{2m+1}(z; h^2)$ 的形状。具体的公式此处从略。

§41　变形 Mathieu 方程的解，漸近公式

在 Mathieu 方程中以 $\frac{1}{i}z$ 代替 z 就得微分方程

$$-\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cosh z)w=0, \tag{41.1}$$

这个方程叫做变形 Mathieu 方程。这个方程与从 Helmholtz 方程用橢圓坐标加以分离变量后所得到的方程(33.4)是同样的。

这里仅講一种在应用上非常重要的情形，卽(41.1)中的 λ 恰好是 Mathieu 方程的周期解所对应的固有値，在这个假設下我們討論一下(41.1)的解。由于在这种情形中，原来的 Mathieu 方程的解是 $\mathrm{ce}_n(z;h^2)$ 与 $\mathrm{fe}_n(z;h^2)$ 及 $\mathrm{se}_n(z;h^2)$ 与 $\mathrm{ge}_n(z;h^2)$，所以可以象下面这样地定义变形 Mathieu 方程的独立解

$$\lambda=\lambda_{2m}^c:\ \mathrm{Ce}_{2m}(z;h^2)=\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{2m}(h^2)\cosh 2rz,$$

$$\mathrm{Fe}_{2m}(z;h^2)=i\,\mathrm{fe}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)$$

$$=C_{2m}(h^2)\left[z\,\mathrm{Ce}_{2m}(z;h^2)+\sum_{r=1}^{\infty}f_{2r}^{2m}(h^2)\sinh 2rz\right], \tag{41.2}$$

$$\lambda=\lambda_{2m+1}^c:\ \mathrm{Ce}_{2m+1}(z;h^2)=\mathrm{ce}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{2m+1}(h^2)\cosh(2r+1)z,$$

$$\mathrm{Fe}_{2m+1}(z;h^2)=i\,\mathrm{fe}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)$$

$$=C_{2m+1}(h^2)\left[z\,\mathrm{Ce}_{2m+1}(z;h^2)+\sum f_{2r+1}^{2m+1}(h^2)\sinh(2r+1)z\right]. \tag{41.3}$$

$$\lambda=\lambda_{2m}^{s}:\quad \mathrm{Se}_{2m}(z;h^2)=i\,\mathrm{se}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)=\sum_{r\geq 1}^{\infty}B_{2r}^{2m}(h^2)\sinh 2rz,$$

$$\mathrm{Ge}_{2m}(z;h^2)=\mathrm{ge}_{2m}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)$$

$$=S_{2m}(h^2)\left[-z\,\mathrm{Se}_{2m}(z;h^2)+\sum_{r\geq 1}^{\infty}g_{2r}^{2m}(h^2)\cosh 2rz\right],\quad (41.4)$$

$$\lambda=\lambda_{2m+1}^{s}:\ \mathrm{Se}_{2m+1}(z;h^2)=i\,\mathrm{se}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)$$

$$=\sum_{r\geq 0}^{\infty}B_{2r+1}^{2m+1}(h^2)\sinh(2r+1)z,$$

$$\mathrm{Ge}_{2m+1}(z;h^2)=\mathrm{ge}_{2m+1}\left(\frac{1}{i}z;h^2\right)$$

$$=S_{2m+1}(h^2)\left[-z\,\mathrm{Se}_{2m+1}(z;h^2)\right.$$

$$\left.+\sum_{r=0}^{\infty}g_{2r+1}^{2m+1}\cosh(2r+1)z\right].\quad (41.5)$$

在应用上常常要求得出函数当 $z>1$ 时的值，以及 $z\gg 1$ 时函数所趋的渐近值。对于这个要求，上面的展开式显然是不适用的。相反，我們利用 Mathieu 函数的积分方程作为出发点会更便利一些，例如考虑函数 $\mathrm{ce}_{2m}(z;h^2)$，这时由它所满足的积分方程 (39.14)

$$\pi A_0^{2m}\mathrm{ce}_{2m}(z)=\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\pi}e^{2ih\cos z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')\,dz'\quad (41.6)$$

出发。首先記 z 及 z' 考虑成为复变数，卽設

$$z=x+iy,\quad z'=x'+iy',$$

这时，令 $y\to\pm\infty$，我們来求 $\mathrm{ce}_{2m}(z)$ 的渐近形式。

为了得到渐近式，可以采用鞍点法。

此外，要得到指数函数的絕对値的估計，可以先取函数的指数的实数部分，卽

$$\operatorname{Re}(2ih\cos z\cos z') = h\{\sin(x-x')\sinh(y-y') + \sin(x+x')\sinh(y+y')\}. \qquad (41.7)$$

这样，如果問題只要求知道 $|\mathrm{ce}_{2m}(z)|$ 的大致的估計，那么可以沿着实数軸进行积分(即取 $y'=0$)，因为(41.7)不能超过 $h\exp|y|$，所以得到了

$$|\mathrm{ce}_{2m}(z)| < Ce^{h\exp|y|}.$$

如果对(41.6)的被积函数中的 $\mathrm{ce}_{2m}(z')$ 利用这个估値，并在 $\cos z\neq 0$ 的假設下，把积分路綫取成由使得在端点处(41.7)成为 $-\infty$ 而使 $y'\to\pm\infty$ 的路綫，这样，这个积分自然就是收斂的。并且由于当 $y'\to\infty$ 时，

$$\operatorname{Re}(2ih\cos z\cos z') \sim \frac{h}{2}\{e^{y}\sin(x+x') - e^{-y}\sin(x-x')\}e^{y'},$$

故此，如果令

$$\text{当 } y>0 \text{ 时}, \qquad x+x' = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

$$\text{当 } y<0 \text{ 时}, \qquad x-x' = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

那么就能有 $\operatorname{Re}(\cdots)<0$. 同样地当 $y'\to\infty$ 时，只需令

$$\text{当 } y>0 \text{ 时}, \qquad x-x' = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

$$\text{当 } y<0 \text{ 时}, \qquad x+x' = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

即可。这样，当 $y>0$ 时，我們引入用下面公式所定义的函数

$$\mathrm{re}_{2m}^{+}(z) = C\int_{0}^{\frac{\pi}{2}+x-i\infty} e^{2ih\cos z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')\,dz',$$

$$\mathrm{re}_{2m}^{-}(z) = C\int_{\frac{\pi}{2}+x-i\infty}^{\pi} e^{2ih\cos z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')\,dz',$$

于是 $\mathrm{ce}_{2m}(z)$ 与 $\mathrm{re}_{2m}^{+}(z)+\mathrm{re}_{2m}^{-}(z)$ 成比例，并且 $\mathrm{re}_{2m}^{\pm}(z)$ 对于固有值 λ_{2m}^{c} 滿足 Mathieu 方程，至于它們的周期性，由于

$$\mathrm{re}_{2m}^{+}(z+\pi)=C\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi+x-i\infty}e^{-2ih\cos z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')\,dz'$$

$$=C\int_{0}^{\pi}+C\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi+x-i\infty}.$$

其中的第一項与 $\mathrm{ce}_{2m}(z)$ 成比例，第二項如果以 $z'+\pi$ 代替 z'，可以看出它本身就是 $\mathrm{re}_{2m}^{+}(z)$。于是就得到

$$\mathrm{re}_{2m}^{+}(z+\pi)=C'\mathrm{ce}_{2m}(z)+\mathrm{re}_{2m}^{+}(z),$$

同样地，能得

$$\mathrm{re}_{2m}^{-}(z+\pi)=-C'\mathrm{ce}_{2m}(z)+\mathrm{re}_{2m}^{-}(z).$$

此外，如果以 $\frac{1}{i}z$ 代替 z，卽得到所謂"变形了的"函数的定义，卽

$$\mathrm{Ce}_{2m}(z)=\frac{\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi A_0^{2m}}\int_{0}^{\pi}e^{2ih\cosh z\cos z'}\,\mathrm{ce}_{2m}(z')\,dz',$$

$$\mathrm{Re}_{2m}^{+}(z)=C\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-i\infty}e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')\,dz',$$

$$\mathrm{Re}_{2m}^{-}(z)=C\int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\pi}e^{2ih\cosh z\cos z'}\mathrm{ce}_{2m}(z')\,dz'.$$

这里为了簡单起見可以假設 z 是正的实数。

現在我們使用鞍点法求一下当 $x\to\infty$ 时，这些函数的漸近形式。首先对指数部分利用对 z' 的微分来决定鞍点，而得这种点是 $z'=0\pmod{\pi}$。如果 $|y|<\frac{\pi}{2}$，那么对于 Re^{+} 或 Re^{-} 的値，只需要知道积分在鞍点 $z'=0$ 及 $z'=\pi$ 附近的値卽可。在 $z'=0$ 的附近，可設 $\cos z'\approx 1-\frac{z'^2}{2}$，并沿着最速下降綫上取

$$z'=e^{-\frac{\pi}{4}i}s,\quad s>0,$$

于是就得到

$$\mathrm{Re}_{2m}^{+}(z) \sim C e^{-\frac{\pi}{4}i} e^{2ih\cosh z} \mathrm{ce}_{2m}(0) \int_0^\infty e^{-h\cosh z s^2} ds$$

$$= C\ \mathrm{ce}_{2m}(0) \sqrt{\frac{\pi}{2\cosh z}} e^{2ih\cosh z - \frac{\pi}{4}i}.$$

同样地能够得到

$$\mathrm{Re}_{2m}^{-}(z) \sim C\ \mathrm{ce}_{2m}(0) \sqrt{\frac{\pi}{2\cosh z}} e^{-2ih\cosh z + \frac{\pi}{4}i},$$

$$\mathrm{Ce}_{2m}(z) \sim \frac{\mathrm{ce}_{2m}(0)\mathrm{ce}_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi A_0^{2m}} \sqrt{\frac{2\pi}{2\cos hz}} \cos\left(2h\cosh z - \frac{\pi}{4}\right).$$

此外，能够对函数 $\mathrm{Ce}_{2m+1}(z)$，$\mathrm{Se}_{2m}(z)$，$\mathrm{Se}_{2m+1}(z)$ 等等得到类似的漸近公式。这样使用椭圆坐标来表示的漸近式都是用波来描述的，由于它們分别可用所表示的波来区别，即有的成为向远方扩張开的波，有的成为向內集聚的波，也有的是駐波，这一点在应用上是非常重要的。

Mathieu 函数所討論的問題是非常广泛的，我們限于篇幅的关系，只能討論到此为止。关于 Mathieu 函数綜合性記載的文献，我們例举下面这些：

E. T. Whittaker and G. N. Watson: Modern analysis.

S. Goldstein: Mathieu functions, Trans. Cambridge Phil. Soc. 23 (1927), 303～336.

M. J. O. Strutt: Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Ergbn. Math. u. Grenzgeb. 1 (1932), 199～323.

J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu and R. A. Hunter: Elliptic cylinder and spheroidal wave functions (New York, 1941).

N. W. McLachlan: Theory and application of Mathieu functions (Oxford, 1947).

J. Meixner and F. W. Schäfke: Mathieusche Funktionen und Sphäroid-funktionen (Berlin, 1954).

A. Erdélyi: Higher transcendental functions, III (New York, 1955).

Tables relating to Mathieu functions (New York, Columbia Univ. Press, 1951).

第8章　回轉橢球函数

§42 引　　言

如在第1章中所說的，当对三維 Helmholtz 方程在回轉橢球坐标系中用变数分离法分离变数以后，就出現了一些微分方程，这些微分方程所定义的函数叫做回轉橢球函数。在扁长回轉橢球的情形，这种方程的形状是

$$\frac{d}{dz}\left\{(z^2-1)\frac{dw}{dz}\right\}+\left(\varkappa^2 z^2-\lambda-\frac{m^2}{z^2-1}\right)w=0\,(m=\text{整数}).\quad(42.1)$$

如果所取的回轉橢球坐标系为

$$x=c\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi\,,$$
$$y=c\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi\,,$$
$$z=c\xi\eta,$$

那么无論对变数 ξ 或是对变数 η，总成立着与(42.1)形状完全一样的方程，仅是变数区間有所不同而已。以 ξ 为自变数时，变数区間是 $\xi>1$，如以 η 为自变数，則 $1>\eta>-1$，出現了不同的变数区間。本书因篇幅关系，只能极簡单地述說一下回轉橢球函数的性質，关于这种函数的綜合文献，除前章最后所介紹的一些論文外，还有

L. J. Chu and J. A. Stratton: Elliptic and spheroidal wave functions, J. Math. Phys. 20 (1941), 259～309.

另外，前章所介紹的 J. Meixner 与 F. W. Schäfke 合著的书中有关于回轉橢球函数极为精辟的論述。

§43 函数 $\mathrm{Ps}_n^m(z)$

当 $-1\leqslant z\leqslant 1$ 时，微分方程(42.1)的正則的(非恒等于0)解就

是函数 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ (这里 $n=m, m+1, \cdots$)，并把这个函数所对应的固有値記作 λ_{nm}。如果 $\varkappa=0$ 的話，(42.1)就退化成为 Legendre 微分方程而 $\lambda_{nm}=n(n+1)$，这时 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 必定是下面的函数

$$P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)$$
$$=\frac{1}{2^n n!}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}(z^2-1)^n \qquad (43.1)$$

乘以某一个确定的常数。

我們沒有規定 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 的規格化，但无論如何来定它的規格化，下面的各公式总是成立的。

对于一般的 $\varkappa$，可以把 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 对 Legendre 函数 (43.1) 作无穷級数展开式，而有

$$\mathrm{pe}_n^m(z)=\sum_{l\geqslant m}^{\infty}A_{n,l}^m P_l^m(z),\qquad l-n|=\text{偶数}. \qquad (43.2)$$

把这个公式代入(42.1)，就得到系数 A 之間的三項关系式，即

$$\left\{-\lambda+l(l+1)+\varkappa^2\frac{2l^2+2l-1-2m^2}{(2l-1)(2l+3)}\right\}A_{n,l}^m$$
$$+\varkappa^2\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-3)(2l-1)}A_{n,l-2}^m$$
$$+\varkappa^2\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)(2l+5)}A_{n,l+2}^m=0,$$
$$(l>m+1). \qquad (43.3)$$

当 $l=m+1$ 或 m 时，$A_{n,l-2}^m$ 的項将消失，而成为二項的关系。解出这样得到的等差方程組，并且注意边界条件

$$\lim_{l\to\infty}(A_{n,l-2}^m/A_{n,l}^m)\to-\frac{\varkappa^2}{4l^2},$$

就能决定固有値 $\lambda=\lambda_{nm}$ 以及 $A_{n,l}^m$ (除了一个公共的常数因数以外)。事实上，当 $\varkappa$ 已知时，可以利用逐次近似法来計算 λ_{nm} 与 $A_{n,l}^m$，至于具体的計算法此处从略。

当 $z>1$ 时，也可用(43.2)来表示(42.1)的解，在这种情形中，

可以代替(43.1)而取

$$P_n^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) \tag{43.4}$$

比較便利，卽設

$$\mathrm{pe}_n^m(z)=\sum_l A_{n,l}^m P_l^m(z). \tag{43.5}$$

有时为了在(43.4)中表示我們采用的因式是$(z^2-1)^{\frac{m}{2}}$而不是$(1-z^2)^{\frac{m}{2}}$，可以在符号P_l^m以及pe_n^m上加点以示区别。

下面我們来导出pe_n^m所满足的积分方程。先令

$$L_z=\frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}\right\}-\varkappa^2 z^2-\frac{m^2}{1-z^2},$$

并設$K(z,z')$是偏微分方程

$$(L_z-L_{z'})K=0 \tag{43.6}$$

的解，并在$-1\leqslant z'\leqslant 1$中正則，于是令

$$w(z)=\int_{-1}^{+1}K(z,z')\,\mathrm{pe}_n^m(z')\,dz', \tag{43.7}$$

則$w(z)$满足微分方程(42.1)，卽

$$L_z w+\lambda w=0.$$

这个事实可以象下面这样証明：

$$\begin{aligned}L_z w&=\int_{-1}^{+1}\{L_z K(z,z')\}\mathrm{pe}_n^m(z')\,dz'\\&=\int_{-1}^{+1}\{L_{z'}K(z,z')\}\mathrm{pe}_n^m(z')\,dz'\\&=\int_{-1}^{+1}K(z,z')\,L_{z'}\mathrm{pe}_n^m(z')\,dz'\\&=-\lambda\int_{-1}^{+1}K(z,z')\,\mathrm{pe}_n^m(z')\,dz'=-\lambda w.\end{aligned}$$

这个結果告訴我們，如果$K(z,z')$对于一切满足$-1\leqslant z'\leqslant 1$的$z'$，在$z=\pm1$处是正則的話，那么$w(z)$必是$\mathrm{pe}_n^m(z)$乘以一个常数。于是(43.7)实际就是$\mathrm{pe}_n^m(z)$所满足的一个积分方程，譬如如下地取

$K(z,z')$:

$$K(z,z')=e^{i\kappa zz'}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}},$$

就能得到下面的积分方程

$$i^{n-m}\nu_{nm}\mathrm{pe}_n^m(z)=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}e^{i\kappa zz'}\mathrm{pe}_n^m(z')dz'. \quad (43.8)$$

实数 ν_{nm} 是与 K 有关的数，它的数值可以由(43.8)以及它的微分后的公式令 $z\to 0$ 而求出，即当 $n-m$ 是偶数时，有

$$(-1)^{\frac{n-m}{2}}\nu_{nm}\mathrm{pe}_n^m(0)=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n^m(z')dz'$$

$$=A_{n,m}^m\frac{2^{m+1}m!}{2m+1}, \quad (43.9)$$

当 $n-m=$ 奇数时，有

$$(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}\nu_{nm}\mathrm{pe}_n^{m\prime}(0)=\kappa\int_{-1}^{+1}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}z'\mathrm{pe}_n^m(z')dz'$$

$$=\kappa A_{n,m+1}^m\frac{2^{m+1}m!}{2m+3}. \quad (43.10)$$

至于 $\mathrm{pe}_n^m(0)$ 及 $\mathrm{pe}_n^{m\prime}(0)$ 的数值，可以根据(43.2)以及下列公式

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{\frac{n-m}{2}}P_n^m(0)&=\frac{1\cdot 3\cdots(n+m-1)}{2\cdot 4\cdots(n-m)}\quad (n-m\text{ 偶}),\\(-1)^{\frac{n-m-1}{2}}P_n^{m\prime}(0)&=\frac{1\cdot 3\cdots(n+m)}{2\cdot 4\cdots(n-m-1)}\quad (n-m\text{ 奇})\end{aligned}\right\} \quad (43.11)$$

容易地求得。

§44　函数 $\mathrm{qe}_n^m(z)$

当 $\lambda=\lambda_{nm}$ 时，方程(42.1)具有与 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 相反奇偶性的解，这个解叫做 $\mathrm{qe}_n^m(z)$。它可以根据下面所設的形状求出

$$\mathrm{qe}_n^m(z)=\sum_{\substack{l\geq -m\\|l-n|=\text{偶}}}A_{n,l}^mQ_l^m(z)+\sum_{\substack{j\geq m\\|j-n|=\text{奇}}}B_{n,j}^mP_j^m(z). \quad (44.1)$$

我們必需注意在 $\mathrm{qe}_n^m(z)$ 的展开式中当 $m>l\geq -m$ 时包含着 $Q_l^m(z)$

与 $P_j^m(z)$ 项。当 $l\geqslant m$ 时，由于这时 $Q_l^m(z)$ 具有形状为

$$Q_l^m(z)=\frac{1}{2}P_l^m(z)\log\frac{1+z}{1-z}+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\times(z\text{的多项式})\quad(44.2)$$

的项，并且当 $m>l\geqslant-m$ 时，$Q_n^m(z)$ 不含有 log 的项。此外，在 (44.1) 中的 $A_{n,l}^m$，对于 $l\geqslant m$ 的各项与 (43.2) 中的 $A_{n,l}^m$ 是完全一致的，至于对 $-m\leqslant l<m$ 的 $A_{n,l}^m$ 以及 $B_{n,j}^m$ 的值的具体求法，因为已在另外一处发表的論文中講述过[1]，故在此处从略。

由(44.1)与(44.2)能够得到关系式

$$\mathrm{qe}_n^m(z)=\frac{1}{2}\mathrm{pe}_n^m(z)\log\frac{1+z}{1-z}+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\times(\text{正则函数}).\quad(44.3)$$

由这个公式立刻可以看到，函数 $\mathrm{qe}_n^m(z)$ 在 $z=\pm1$ 处具有奇异性。

和 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 的情形一样，对于 $z>1$，可以代替(44.1)而使用下面的公式

$$\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)=\sum_{\substack{l\geqslant-m\\|l-n|=\text{偶}}}A_{n,l}^m\dot{Q}_l^m(z)+\sum_{\substack{j\geqslant m\\|j-n|=\text{奇}}}B_{n,j}^m\dot{P}_j^m(z),\quad(44.4)$$

$$\dot{Q}_l^m(z)=\frac{1}{2}\dot{P}_l^m(z)\log\frac{z+1}{z-1}+(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\times(z\text{的多项式}).\quad(44.5)$$

于是就得到了

$$\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)=\frac{1}{2}\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)\log\frac{z+1}{z-1}+(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\times(\text{正则函数}).\quad(44.6)$$

为了要得到 $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 的积分表示，可以考虑下列的积分

$$(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{+1}\frac{J_{-m-1/2}\{\varkappa(z-z')\}}{\{\varkappa(z-z')\}^{m+1/2}}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n^m(z')dz'.\quad(44.7)$$

由于 $K(z,z')=\dfrac{J_{-(m+1/2)}\{\varkappa(z-z')\}}{\{\varkappa(z-z')\}^{m+1/2}}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}$ 满足方程 (43.6)，并且在 $|z|>1$ 时，对于 $-1\leqslant z'\leqslant+1$ 中的 z' 都是正则的，故 (44.7) 确实是微分方程 (42.1) 关于 $\lambda=\lambda_{mn}$ 的解。但是当 $x\to1$，$y\to1$ 时，$K(z,z')$ 显然具有奇异性，所以 (44.7) 在 $z=\pm1$

[1] 見 Kotani: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 15(1933), 30.

处并不是正則的。但是容易理解，在 $|z|>1$ 的范圍中，如果令 $z\to(-z)$ 的話，那么积分將乘以符号 $-(-1)^n$，而 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 將乘以符号 $(-1)^n$。因此 (44.7) 的奇偶性应該恰好与 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 的奇偶性相反，卽 (44.7) 必然是 $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 乘以某一个常数，于是設

$$D_{nm}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{+1}\frac{J_{-m-1/2}\{\varkappa(z-z')\}}{\{\varkappa(z-z')\}^{m+1/2}}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n^m(z')dz'. \tag{44.8}$$

我們象下面这样地来决定 D_{nm}，如图 44.1 中所示，在复数平面上以連接 -1 与 1 的綫段作为割綫，于是 qe_n^m 作为复变数的函数是单值的，如果取 z 为 -1 与 $+1$ 間的实数，那么象图中的那样取积分曲綫作为接近于实軸在 z 处的上、下岸的曲綫，則由 (44.6) 有

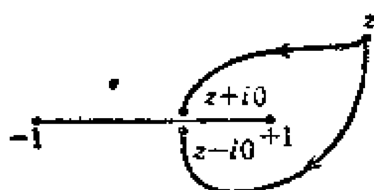


图 44.1

$$i^{-m}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z+i0)=-\frac{\pi i}{2}\mathrm{pe}_n^m(z)+\frac{1}{2}\mathrm{pe}_n^m(z)\log\frac{1+z}{1-z}$$
$$+(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}f_n^m(z),$$
$$i^m\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z-i0)=\frac{\pi i}{2}\mathrm{pe}_n^m(z)+\frac{1}{2}\mathrm{pe}_n^m(z)\log\frac{1+z}{1-z}$$
$$+(1-z^2)^{\frac{m}{2}}f_n^m(z)\quad(f_n^m(z)\text{ 是 }z\text{ 的单値函数}),$$

卽有

$$i^m\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z+i0)-i^{-m}\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z-i0)=\pi i\,\mathrm{pe}_n^m(z).$$

把这个結果代入到 (44.8) 并化簡之后，有

$$(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\oint\frac{J_{-m-1/2}\{\varkappa(z-z')\}}{\{\varkappa(z-z')\}^{m+1/2}}\mathrm{pe}_n^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'$$
$$=-\pi iD_{nm}\mathrm{pe}_n^m(z). \tag{44.9}$$

这里左边的积分是圍繞着极 $z'=z$ 正向轉动一周的积分，故此可以根据留数的計算結果而求出 D_{nm}。又因为这个极的阶数是 $2m+1$，所以留数中必然含有 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 的 $2m$ 阶的导函数，并且利用 $\mathrm{pe}_n^m(z)$

所满足的微分方程可以断定它必然是 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 的常数倍，这样就能得到結果。此外，对于相当小的 m 值，通常使用下面的公式

$$D_{n_0}=\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{2}{\varkappa}},\quad D_{n_1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{\lambda_{m_1}-\varkappa^2}{\varkappa^3}}. \tag{44.10}$$

§45 函数 $\mathrm{Pe}_n^m(z)$, $\mathrm{Qe}_n^m(z)$, $\mathrm{Re}_n^m(z)$

前面我們因为注意到微分方程 (42.1) 在 $z=\pm1$ 的附近具有与 Legendre 方程相似的形状，所以把 (42.1) 的解用 Legendre 函数加以展开，从而求到了方程的解，但是如果用这种写法来研究当 $|z|\gg1$ 时的解的状态是非常不便的。因为方程 (42.1) 当 $z\to\infty$ 时，具有与 Bessel 微分方程类似的性质，所以我們定义与 Bessel 函数 J, Y 以及 $H^{(1)}$, $H^{(2)}$ 相应的函数 $\mathrm{Pe}_n^m(z)$, $\mathrm{Qe}_n^m(z)$, 以及 $\overset{+}{\mathrm{R}}\mathrm{e}_n^m(z)$, $\overset{-}{\mathrm{R}}\mathrm{e}_n^m(z)$。即这些函数都是方程(42.1)的解，并且当 $z\to\infty$ 时，具有下面的漸近形式：

$$\mathrm{Pe}_n^m(z)\sim\frac{\sin\left(\varkappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\varkappa z}, \tag{45.1}$$

$$\mathrm{Qe}_n^m(z)\sim\frac{\cos\left(\varkappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\varkappa z}, \tag{45.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{+}{\mathrm{R}}\mathrm{e}_n^m(z)&\sim(-i)^{n+1}\frac{e^{i\varkappa z}}{\varkappa z},\\ \overset{-}{\mathrm{R}}\mathrm{e}_n^m(z)&\sim i^{n+1}\frac{e^{-i\varkappa z}}{\varkappa z}.\end{aligned}\right\} \tag{45.3}$$

明显地这些函数之間成立着下面的关系：

$$\overset{\pm}{\mathrm{R}}\mathrm{e}_n^m(z)=\mathrm{Pe}_n^m(z)\pm i\mathrm{Qe}_n^m(z). \tag{45.4}$$

由于我們已經知道了方程 (42.1) 的独立解是 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 以及 $\mathrm{qe}_n^m(z)$，所以这一节所定义的函数一定可以用 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 以及 $\mathrm{qe}_n^m(z)$

来表达。事实上，我們下面将要看到，函数 $\mathrm{Pe}_n^m(z)$，$\mathrm{Qe}_n^m(z)$ 不是別的函数，它們恰好分別是 $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 与 $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 的常数倍。

首先，由(43.8)有

$$i^{n-m}\nu_{nm}\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_{-1}^{+1}e^{\varkappa zz'}(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{pe}_n^m(z')dz', \quad (45.5)$$

对 $\mathrm{pe}_n^m(z)$ 把展开式(43.2)代入，并进行逐項积分，就得到了 $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 关于 Bessel 函数的展开式，即

$$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\nu_{nm}}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\sum_l(-1)^{\frac{l-n}{2}}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m\frac{J_{l+1/2}(\varkappa z)}{(\varkappa z)^{m+1/2}}. \quad (45.6)$$

使用这个公式，当 $\varkappa z\gg1$ 时，就求得了 $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 的漸近公式为

$$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)\sim\frac{2}{\nu_{nm}\varkappa^m}\left(\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m\right)\frac{\sin\left(\varkappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\varkappa z}. \quad (45.7)$$

把这个公式与(45.1)比較，就得到了 $\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 与 $\mathrm{Pe}_n^m(z)$ 之間的关系如下：

$$\dot{\mathrm{p}}\mathrm{e}_n^m(z)=\frac{2}{\nu_{nm}\varkappa^m}\left(\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m\right)\mathrm{Pe}_n^m(z). \quad (45.8)$$

所以对 $\mathrm{Pe}_n^m(z)$ 成立着下列的公式：

$$\mathrm{Pe}_n^m(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa}}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{\sum_l(-1)^{\frac{l-n}{2}}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m\frac{J_{l+1/2}(\varkappa z)}{z^{m+1/2}}}{\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m}. \quad (45.9)$$

$\mathrm{Qe}_n^m(z)$ 可以不用 $J_{l+1/2}(\varkappa z)$ 而用 $Y_{l+1/2}(\varkappa z)=-(-1)^lJ_{-l-1/2}(\varkappa z)$ 的級数来表达。

下面我們求 $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 与 $\mathrm{Qe}_n^m(z)$ 之間的关系。为了这个目的，我們使用(44.8)，而研究 $\dot{\mathrm{q}}\mathrm{e}_n^m(z)$ 当 $\varkappa z\gg1$ 时的漸近公式。当 $\varkappa z\gg1$ 时，由于

$$J_{-m-1/2}\{\varkappa(z-z')\}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\varkappa z}}\cos\left(\varkappa z-\varkappa z'+\frac{m\pi}{2}\right),$$

所以

$$D_{nm}\dot{q}e_n^m(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\varkappa^m}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos\left(\varkappa z-\varkappa z'+\frac{m\pi}{2}\right)}{\varkappa z}pe_n^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varkappa^m}\left[\frac{e^{i\varkappa z+\frac{m\pi}{2}i}}{\varkappa z}\int_{-1}^{+1}e^{-i\varkappa z'}pe_n^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-i\varkappa z-\frac{m\pi}{2}i}}{\varkappa z}\int_{-1}^{+1}e^{i\varkappa z'}pe_n^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'\right]. \quad (45.10)$$

这里所出現的积分可以利用(43.8)来計算而有

$$\int_{-1}^{+1}e^{i\varkappa z'}pe_n^m(z')(1-z'^2)^{\frac{m}{2}}dz'=i^{n-m}\nu_{nm}\lim_{z\to1}\frac{pe_n^m(z)}{(1-z^2)^{m/2}}$$

$$=\frac{i^{n-m}\nu_{nm}}{2^m m!}\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m. \quad (45.11)$$

即

$$D_{nm}\dot{q}e_n^m(z)$$

$$\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^m\nu_{nm}}{2^m m!\varkappa^m}\left(\sum_l\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m\right)\frac{\cos\left(\varkappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\varkappa z}. \quad (45.12)$$

把这个公式与(45.2)比較，就得到下面的关于 $\dot{q}e_n^m(z)$ 与 $Qe_n^m(z)$ 之間的关系：

$$\dot{q}e_n^m(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(-1)^m\nu_{nm}}{2^m m!\varkappa^m D_{nm}}\left(\sum\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A_{n,l}^m\right)Qe_n^m(z). \quad (45.13)$$

§ 46 $m=1$ 的情形

当討論以回轉椭球的旋轉軸作为对称軸的电磁場时，$m=1$ 的函数特別重要，所以在本节中我們特別講述一下这种情形的函数。

如在方程(42.1)中，令

$$w(z)=\frac{V(z)}{\sqrt{|z^2-1|}}, \quad (46.1)$$

則可把方程变形为下面的标准形

$$(1-z^2)\frac{d^2V}{dz^2}+\left(\lambda-\varkappa^2z^2-\frac{m^2-1}{1-z^2}\right)V=0. \qquad (46.2)$$

当 $m=1$ 时,标准形方程特别簡单,成为

$$(1-z^2)\frac{d^2V}{dz^2}+(\lambda-\varkappa^2z^2)V=0. \qquad (46.3)$$

此外,如果 $\lambda=\varkappa^2$ 的話,那么方程(46.3)就是

$$\frac{d^2V}{dz^2}+\varkappa^2V=0. \qquad (46.4)$$

于是 V 可用三角函数来表示。但是为了 $\lambda=\varkappa^2$ 的关系得以实現,那么对于这样的$\varkappa$,方程(46.4)必須具有在 $z=\pm1$ 处成为0的解。由于(46.4)在 $z=1$ 处为0的解是 $c\sin\{\varkappa(z-1)\}$,为了使得这个解在 $z=-1$ 处也是0,那么必然 $\sin 2\varkappa=0$,即必然成立关系

$$\varkappa=\frac{n\pi}{2}, \quad n=1,2,3\cdots. \qquad (46.5)$$

当 $\varkappa$ 取値如(46.5)时,則有

$$\mathrm{Pe}_n^1(z)=\frac{\sin\left(\varkappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\varkappa\sqrt{z^2-1}}=\frac{2}{n\pi}\frac{\sin\frac{n\pi(z-1)}{2}}{\sqrt{z^2-1}}, \qquad (46.6)$$

$$\mathrm{Qe}_n^1(z)=-\frac{\cos\left(\varkappa z-\frac{n\pi}{2}\right)}{\varkappa\sqrt{z^2-1}}=-\frac{2}{n\pi}\frac{\cos\frac{n\pi(z-1)}{2}}{\sqrt{z^2-1}}, \qquad (46.7)$$

$$\lambda_{n1}=\varkappa^2=\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \qquad (46.8)$$

$$\nu_{n1}=\frac{2}{\varkappa}=\frac{4}{n\pi}. \qquad (46.9)$$

§47 $\varkappa\to0$ 的极限情形

当 z 有限而 $\varkappa\to0$ 时,那么方程(42.1)就归結成为陪 Legendre 函数的方程,即当 $\varkappa\to0$ 时,函数 $\mathrm{pe}_n^m(z)$, $\mathrm{qe}_n^m(z)$ 的极限情形分别归結成为 $P_n^m(z)$ 与 $Q_n^m(z)$。事实上,在极限情形,所有的 $A_{n,l}^m$ 对 $n\neq l$

都成为 0。因此,(43.2)与(44.1)中的展开式最后只剩下了一項。这些結果可以总結地写成下面这样:

$$\lambda_{nm}\to n(n+1), \tag{47.1}$$

$$A^m_{n,n+2s}\to C(-1)^s\frac{(n-m+1)_{4s}}{2^{4s}s!\left(n+\frac{3}{2}\right)_s\left(n+\frac{1}{2}\right)_{2s}}\varkappa^{2s}, \tag{47.2}$$

这里 $\mu_l=\mu(\mu+1)\cdots(\mu+l-1)$。

$$\nu_{nm}\to\frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(n-m)!}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\varkappa^{n-m}, \tag{47.3}$$

$$D_{nm}\to\frac{(n+m)!}{\sqrt{\pi}\,2^{m-\frac{3}{2}}(n-m)!\,m!\,\varkappa^{2n+1}}, \tag{47.4}$$

$$\mathrm{pe}^m_n(z)\to A^m_{n,n}P^m_n(z), \tag{47.5}$$

$$\mathrm{qe}^m_n(z)\to A^m_{n,n}Q^m_n(z), \tag{47.6}$$

$$\mathrm{Pe}^m_n(z)\to\frac{\pi}{2^{2n+1}}\frac{(n-m)!\,\varkappa^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}P^m_n(z), \tag{47.7}$$

$$\mathrm{Qe}^m_n(z)\to(-1)^m\frac{2^{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\pi(n-m)!\,\varkappa^{n+1}}Q^m_n(z). \tag{47.8}$$

如果当 $\varkappa\to0$ 时,同时又有 $z\to\infty$,并且乘积 $\varkappa z$ 保持有限的話,那末(42.1)就归結成为 Bessel 方程,这时的极限情形为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Pe}^m_n(z)\to\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa z}}J_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa z),\quad \mathrm{Qe}^m_n(z)\to\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa z}}Y_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa z),\\&\overline{\mathrm{Re}}^m_n(z)\to\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa z}}H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa z),\quad \overline{\overline{\mathrm{Re}}}^m_n(z)\to\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa z}}H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa z).\end{aligned}\right\} \tag{47.9}$$

(47.9)中所表示的关系,可以使用于討論回轉橢球面过渡到球面时的极限情形。

校后記

莫 叶等

特殊函数在物理工程以及数学中应用很广。本书討論了一些重要的特殊函数，如 Γ 函数，B 函数，超几何函数，球函数，合流型超几何函数，圓柱函数，Mathieu 函数等的理論，內容丰富、完备，叙述簡洁，是工程技术人員及研究特殊函数的数学工作者的一本很好的参考书。

研究特殊函数一般常用的有四种方法：从母函数出发定义特殊函数；从 Gauss 方程出发用合流的办法研究各种特殊函数；从固有值（本征值）問題出发，通过固有值和固有函数引进特殊函数；最近还有从一般的遞推公式 $\frac{\partial}{\partial z}F(z, \alpha)=F(z, \alpha+1)$ 出发，用統一的方法来研究特殊函数的，柴垣和三雄的《特殊函数論》第五章所介紹的就是这种方法。

这四种方法各有优点。本书基本上是采用合流的办法，这也是一般的特殊函数論书中常用的方法。固有值方法在物理中最常遇到，例如通过它可以确定固有頻率及粒子的能量，有兴趣的讀者可以参閱有关的书籍。

本书采用 Euler 第二种积分作为 Γ 函数的定义，从而推出其性质及其无限乘积的表达式。这样作虽然与微积分的知識較易銜接，但在揭露 Γ 函数为半純函数的本质以及推导 Γ 函数与正弦函数之間的关系等方面，不如采用无限乘积作为 Γ 函数的定义来得更自然。

本书在討論 Legendre 函数时沒有介紹利用母函数的方法来

研究 Legendre 函数的性质，这种方法处理許多問題是比較簡便的。

本书引进合流型超几何級数之后，接着就討論 Whittaker 方程的解，这样作比較容易掌握；但在証明 Whittaker 函数的漸近公式时不如采用圍道积分作为 Whittaker 函数的定义更为簡捷。另外对合流型超几何函数在函数論方面的应用注意得較少。

本书討論 Mathieu 函数时利用群表示的观点对周期解进行了分类，这样的处理是較为簡洁的。

特殊函数的 Laplace 变换十分有用，本书未曾提及；特殊函数中一些較近代的結果如 Bessel 多項式之类也未引进。还有在理論及应用方面均占重要位置的特殊函数——Jacobi 椭圓函数与 Weierstrass 椭圓函数也未討論。这不能不认为是本书的缺陷。

特殊函数的理論是函数論中比較成熟的一个分支。这方面的书籍很多，特別是 Γ 函数，几乎在所有有关复变函数論的书籍中都会讲到。我們认为苏联馬庫雪維奇教授所著《解析函数論》第七章第三节所述是較为完善的。

苏联斯米尔諾夫院士所著《高等数学教程》第三卷第二分册对各种特殊函数及其应用，作了很詳尽的討論；拉甫倫捷夫院士与沙巴特合著《复变函数論方法》以及列別捷夫著《特殊函数及其应用》均簡要地介紹了特殊函数的理論及其应用。

欧美书籍中以英国 Whittaker 与 Watson 合著 Modern Analysis 一书介紹特殊函数理論較为詳細，但忽略了应用部分。另外，Watson 还有关于 Bessel 函数的专著，內容十分丰富；爱尔台里主編彼得曼遺著《高級超越函数》几乎收集了所有特殊函数的成果，惜該书近似于文摘性质，叙述过簡，不易閱讀。

本书作者过于注意叙述簡洁，可能有許多地方使讀者不易掌握。我們作了一些注解，改正了原书中一些印刷錯誤及笔誤，介紹

了一些参考书，这对讀者或許能略有帮助，但因限于时間及水平，注解之处可能还存在錯誤，希望讀者指正。注解方面第一章由莫叶执笔，第二、第六章由孙訥正，第三、四两章由袁益让，第五章由孙敬猷，第七章由潘承洞执笔，程凤玉同志帮助抄写整理。至于原书的第八章，作者仅对回轉椭圓球函数作了概括的叙述，讀者欲研究这方面內容可参看該章所指出的参考书。

参考文献

[1] A. И. 馬庫雪維奇：解析函数論。

[2] M. A. 拉甫倫捷夫，Б. A. 沙巴特：复变函数論方法。

[3] B. И. 斯米尔諾夫：高等数学教程，第三卷第二分册。

[4] B. B. 戈魯別夫：微分方程解析理論讲义。

[5] H. H. 列別捷夫：特殊函数及其应用。

[6] C. Л. 索波列夫：数学物理方程。

[7] A. H. 吉洪諾夫，A. A. 薩馬尔斯基：数学物理方程。

[8] A. 爱尔台里：高級超越函数。

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson: A Course of Modern Analysis.

[10] E. T. Copson: An Introduction to the Theory of Function of a Complex Variable.

[11] G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Function.

[12] 柴垣和三雄：特殊函数論(現代数学讲座 5-B).

注　解

第 1 章

① 这段的意思是定积分$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$的被积函数

$$e^{-t}t^{z-1}=e^{-t+(z-1)\log t}$$

对任意固定的$t>0$而言，在$\mathrm{Re}\,z>0$中为z的正則函数，并且可以証明(証明見本书p.1的末段)，在$\mathrm{Re}\,z>0$的任意有界閉区域R中定积分一致收斂。于是根据定积分表正則函数的定理(参閱斯米尔諾夫著《高等数学教程》第三卷第二分册70、71两节)可以証明用这个定积分所定义的$\Gamma(z)$在$\mathrm{Re}\,z>0$中为正則函数。

② 令$z=x+iy$. 当$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, $z\neq 0$时，我們利用

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z} \tag{1}$$

来定义$\Gamma(z)$. 当$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$时，则

$$\frac{1}{2}<x+1<\frac{3}{2},$$

所以只要$z\neq 0$, (1)的右端就有意义，且为z的正則函数。但在$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$的子区域$0<x<\frac{1}{2}$中，(1.2)成立；因此用(1)所定义的$\Gamma(z)$与用(1.1)所定义的$\Gamma(z)$完全相同。是以按照这种方法就将$\Gamma(z)$的定义自$\mathrm{Re}\,z>0$延拓至$\mathrm{Re}\,z>-\frac{1}{2}$. 关于解析延拓的一般理論参看普里瓦洛夫著《复变函数引論》第十章。

③ 当$-(n+1)<z<-n\leqslant 0$时，则$0<z+n+1<1$; 这时$\Gamma(z+n+1)>0$, 于是从(1.5)知$\Gamma(z)$与$(-1)^{n+1}$同符号。

④ 設n为正整数或零。函数$\Gamma(z)$以$z=-n$为单极，函数$\sin\pi z$以$z=-n$为单零点，而$\Gamma(1-z)$则在$z=-n$处为正則；故其乘积$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z$在$z=-n$处为正則，当然連續；在(1.7)中令$\varepsilon\to 0$即可証明其值为$\pi$. 对$z=n$有相同說明。

⑤ 設小圓与大圓的方程順次为$z=\varepsilon e^{i\theta}$及$z=Re^{i\theta}$, 则在小圓与大圓上的积

分绝对值顺次为

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{q-1}}{1+\varepsilon e^{i\theta}}\varepsilon e^{i\theta}id\theta\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\left|\frac{(\varepsilon e^{i\theta})^q}{1+\varepsilon e^{i\theta}}\right|d\theta$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^q}{1-\varepsilon}d\theta=\frac{2\pi\varepsilon^q}{1-\varepsilon}=O(\varepsilon^q)$$

及

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{(Re^{i\theta})^{q-1}}{1+Re^{i\theta}}\cdot Re^{i\theta}id\theta\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\left|\frac{(Re^{i\theta})^q}{1+Re^{i\theta}}\right|d\theta$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{R^q}{R-1}\cdot d\theta=\frac{2\pi R^q}{R-1}=2\pi\cdot\frac{R^{-(1-q)}}{1-\frac{1}{R}}=O(R^{-(1-q)}).$$

⑥　显然

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\{t(1-t)\}^{z-1}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\{t(1-t)\}^{z-1}dt.$$

令 $t=1-v$，则

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\{t(1-t)\}^{z-1}dt=\int_{\frac{1}{2}}^0\{(1-v)v\}^{z-1}(-dv)=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(1-v)v\}^{z-1}dv.$$

是以
$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{t(1-t)\}^{z-1}dt.$$

⑦　本段所得出的 $\Gamma(z)$ 的积分表达式 (2.3) 习惯上称为 $\Gamma(z)$ 的 Hankel 积分表达式。这公式不同于(1.1)的 $\Gamma(z)$ 的 Euler 第二种积分表达式，它是对所有复数 z (整数值例外)均可用，而(1.1)则仅适用于 $\operatorname{Re} z>0$。

在 (1.1) 的积分中，变数 t 为实变数，自 $t=0$ 变至 $+\infty$。在 $t=0$ 处，若 $\operatorname{Re} z<0$，则(1.1)右端的积分中被积函数不連續且积分不存在。

我們再观察(2.1)右端的积分，这里积分变数 t 为复变数，沿积分路綫 C 进行。由于 C 繞过 $t=0$ 而不經过 $t=0$，所以在 C 的有限部分，不論 z 如何变化，被积函数恒为 t 的連續函数，故积分恒存在；因此只要考虑在 $t=\infty$ 处积分的性质即够。同 §1 前段关于 (1.1) 的积分討論完全一样，可以証明这积分也是一致收斂的；并注意被积函数 $e^{-t}t^{z-1}$ 为 z 的正則函数，即可推出用 (2.1) 所定义的 $w(z)$ 对所有有限 z 为正則，即 $w(z)$ 为整函数。

至于建立 $w(z)$ 与 $\Gamma(z)$ 的关系，首先在 $\operatorname{Re} z>0$ 的条件下进行。記图2.2的积分路綫为 C_ε。在 C 与 C_ε 之間，对固定的 z 而言，被积函数 $e^{-t}t^{z-1}$ 为 t 的正則函数，因此根据 Cauchy 定理即知

$$w(z)=\int_C e^{-t}t^{z-1}dt=\int_{C_\varepsilon}e^{-t}t^{z-1}dt.\tag{1}$$

沿路綫 C_ε 积分可分为三段：在实軸上岸自 $+\infty$ 至 $+\varepsilon$，这时 $\arg t=0$；沿小圓 γ_ε 半徑为 ε，中心为原点，幅角自 0 至 2π；在实軸下岸自 $+\varepsilon$ 至 $+\infty$，这时 $\arg t=2\pi$；即

$$w(z)=\int_\infty^\varepsilon e^{-t}t^{z-1}dt+\int_{\gamma_\varepsilon}e^{-t}t^{z-1}dt+e^{2\pi iz}\int_\varepsilon^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{2}$$

在 (2) 的右端第一第三两个积分的变数 t 均为实变数；在条件 $\mathrm{Re}z>0$ 下，根据(1.1)知当 $\varepsilon\to 0$ 时其极限順次为 $\Gamma(z)$ 及 $e^{2\pi iz}\Gamma(z)$。現在考虑(2)中第二个积分。令 $t=\varepsilon e^{i\theta}$，$z=x+iy$，則

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_\varepsilon}e^{-t}t^{z-1}dt\right|&=\left|\int_0^{2\pi}e^{-\varepsilon e^{i\theta}}(\varepsilon e^{i\theta})^{z-1}\varepsilon e^{i\theta}id\theta\right|\\&=\left|\int_0^{2\pi}e^{-\varepsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}(\varepsilon e^{i\theta})^{x+iy}id\theta\right|\\&\leqslant\int_0^{2\pi}\left|e^{-\varepsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}e^{(x+iy)(\log\varepsilon+i\theta)}\right|d\theta\\&=\int_0^{2\pi}e^{-\varepsilon\cos\theta}\varepsilon^x e^{-y\theta}d\theta\leqslant\varepsilon^x\int_0^{2\pi}e^{\varepsilon+|y|2\pi}d\theta\\&=2\pi\varepsilon^x e^{\varepsilon+|y|2\pi}=O(\varepsilon^x).\end{aligned} \tag{3}$$

注意 $\mathrm{Re}z=x>0$，从 (3) 即知

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}e^{-t}t^{z-1}dt=0. \tag{4}$$

又知(1)对所有正数 ε 不論如何小恒成立，是以在(1)中令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$w(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

再利用 (2) 及 (4) 即得，当 $\mathrm{Re}z>0$ 时，

$$w(z)=-\Gamma(z)+e^{2\pi iz}\Gamma(z).$$

从此即得(2.2)以及(2.3)。已知当 $\mathrm{Re}z>0$ 时(2.3)成立，利用解析延拓即可証明在全 z 面 (2.3) 亦成立；这就証明了 $\Gamma(z)$ 的 Hankel 积分表达式。

在 (2.3) 中将 z 易以 $1-z$ 得

$$\begin{aligned}\Gamma(1-z)&=\frac{e^{-\pi i(1-z)}}{2i\sin\pi(1-z)}\int_C e^{-t}t^{-z}dt\\&=-\frac{e^{\pi iz}}{2i\sin\pi z}\int_C e^{-t}t^{-z}dt.\end{aligned} \tag{5}$$

从(1.18) 知 $\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\Gamma(z)\sin\pi z}$，以此代入(5)并簡化即得(2.4)。

③ 本段所得 $B(p,q)$ 的积分表达式 (2.6) 习慣上称为 $B(p,q)$ 的

Pochhammer 积分表达式。

我們知道用(1.12)給出 $B(p, q)$ 的 Euler 第一种积分表达式只能在条件 $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$ 的情形下可用；因为如果 $\mathrm{Re}p\leqslant 0$, 則 Euler 第一种积分在 $t=0$ 处不存在，如果 $\mathrm{Re}q\leqslant 0$, 則在 $t=1$ 处不存在。

当 $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$ 时 (1.14) 給出 B 函数与 Γ 函数的关系。倘若这个条件 (指 $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$) 不滿足，注意 (1.14) 的右端在全 p 面及全 q 面中，当 p 固定时是 q 的正則函数，当 q 固定时是 p 的正則函数(除去一些显然例外值)。于是采用(1.14)将 $B(p,q)$ 解析延拓至全 p 面及全 q 面。

現在希望得出 $B(p, q)$ 的积分表达式对所有 p, q 均可用；这样的积分类似于 Γ 函数的 Hankel 积分表达式，必須选取积分路綫繞过 $t=0$ 及 $t=1$ 两点。

考察(2.5)右端的积分。注意被积函数 $t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ 是 t 的多值函数，以 $t=0$ 及 $t=1$ 为支点。积分路綫 C 是取在黎曼迭面的閉曲綫，自 t 面实軸上位于 0 与 1 之間的一定点 A 出发，这时 t 及 $1-t$ 的幅角均为 0；以正方向繞过 $t=1$，这时二者的幅角順次为 0 及 2π；再以正方向繞过 $t=0$，这时二者的幅角順次为 2π 及 2π；再以負方向繞过 $t=1$，这时二者的幅角順次为 2π 及 0；最后以負方向繞过 $t=0$ 仍旧回到点 A，这时二者幅角又均为 0. C 的图形如图 2.3。为表明 C 的这种特殊取法，在(2.5)中采用記号 $\int_C^{(1+,0+,1-,0-)}$ 代替 $\int_C$。由于 C 不經过 $t=0$ 及 $t=1$，故用 (2.5) 所定义的 $F(p, q)$ 在全 p 面及全 q 面有意义，且当 p 固定时为 q 的正則函数，当 q 固定时为 p 的正則函数。在黎曼迭面上 Cauchy 定理仍成立，因此可将图 2.3 的积分路綫 C 换为图 2.4 的积分路綫，仍記作 C，积分之值不变。这时 C 由四条直綫 a, b, c, d 及四个小圆組成；点 A 在直綫 a 上，接联 a 以正方向繞过 $t=+1$ 的小圆記作 γ_{+1}，类似地采用 γ_{+0}, γ_{-1}, γ_{-0} 記其余三个小圆。在 a, b, c, d 上被积函数之值順次为

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1},\quad t^{p-1}(1-t)^{q-1}e^{2\pi i(q-1)},$$
$$t^{p-1}e^{2\pi i(p-1)}(1-t)e^{2\pi i(q-1)},\quad t^{p-1}e^{2\pi i(p-1)}(1-t)^{q-1}.$$

在条件 $\mathrm{Re}p>0$, $\mathrm{Re}q>0$ 之下可以証明当四个小圆的半徑 r 趋向于零时，沿四个小圆的每一个积分均趋于零；于是即可建立 $F(p, q)$ 与 $B(p, q)$ 的关系。

事实上，令圆 γ_{+1} 的方程为 $1-t=re^{i\theta}$，并令 $q=q_1+iq_2$. 注意当

$r\to0$ 时，$t\to1$，因而对所有 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，

$$|t^{p-1}|=|(1-re^{i\theta})^{p-1}|$$

为有界，可設其值不超过一固定正常数 M。于是

$$\left|\int_{\gamma_{+1}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\right| = \left|\int_0^{2\pi}(1-re^{i\theta})^{p-1}(re^{i\theta})^{q-1}(-re^{i\theta}i)d\theta\right|$$

$$=\left|i\int_0^{2\pi}(1-re^{i\theta})^{p-1}(re^{i\theta})^{q}d\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi}|(1-re^{i\theta})^{p-1}||(re^{i\theta})^{q}|d\theta$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} Mr^{q_1}e^{-\theta q_2}d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} Mr^{q_1}e^{2\pi|q_2|}d\theta$$

$$=2\pi Me^{2\pi|q_2|}r^{q_1}=O(r^{q_1})\text{。}$$

从此即知
$$\lim_{r\to0}\int_{\gamma_{+1}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=0\text{。}$$

同理可証当 $r\to0$ 时沿其余三个小圓 γ_{+0}，γ_{-1}，γ_{-0} 的每一个积分均趋向于零。是以当 $\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$ 时有

$$F(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt+\int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1}e^{2\pi iq}dt$$

$$+\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}e^{2\pi i(p+q)}dt+\int_1^0 t^{p-1}(1-t)^{q-1}e^{2\pi ip}dt$$

$$=(1-e^{2\pi iq}+e^{2\pi i(p+q)}-e^{2\pi ip})\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

$$=(1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})B(p,q)\text{。}$$

从此及(2.5)即可得(2.6)。已經証明了(2.6)对 $\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$ 成立，利用解析延拓，即知(2.6)对所有 p，q 之值均成立。

⑨ 本节所述鞍点法又称最速下降法。本书叙述过于簡洁，讀者欲得更进一步的了解，可参閱斯米尔諾夫著《高等数学教程》第三卷第二分册 § 78，或拉甫倫捷夫与沙巴特著《复变函数論方法》74 节，或 Watson 著 Bessel Functions § 8.3。

⑩ 若在 τ 平面作有切綫的曲綫 L 使 $\mathrm{Im}\,f(\tau)=$常数，且在 L 上选取点 τ_0 使 $\mathrm{Re}\,f(\tau)$ 有极大值，則必有

$$f'(\tau_0)=0\text{。}\tag{1}$$

事实上，令 $\tau=u+iv$，$\tau_0=u_0+iv_0$，

$$f(\tau)=g(u,v)+ih(u,v)\text{。}\tag{2}$$

令 L 的方程为

$$u=u(t),\quad v=v(t),\tag{3}$$

并設 $t=t_0$ 对应于 $\tau=\tau_0$，則从条件 $\mathrm{Im}\,f(\tau)=$常数得

$$h\{u(t),v(t)\}=\text{常数。}\tag{4}$$

从(4)得

$$\frac{\partial h}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial h}{\partial v}\frac{dv}{dt}=0, \tag{5}$$

对所有 t 均成立，当然对 $t=t_0$ 成立。

另一方面，对 L 上的点而言，

$$\mathrm{Re}f(\tau)=g(u,v)=g\{u(t),v(t)\},$$

于是

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}f(\tau)=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{6}$$

因 $\mathrm{Re}f(\tau)$ 在 $\tau=\tau_0$ 处有极大值，故在 (6) 中置 $t=t_0$ 得

$$\frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{dv}{dt}=0. \tag{7}$$

从(5)及(7)消去 $\frac{du}{dt}$，$\frac{dv}{dt}$（二者不同时为零）得当 $\tau=\tau_0$ 时，

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v}\\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v}\end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

利用 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial h}{\partial v},\quad \frac{\partial g}{\partial v}=-\frac{\partial h}{\partial u},$$

从(8)得

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2=0,$$

这就証明

$$|f'(\tau_0)|^2=\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2=0,$$

因而推得 (1)。反之亦可証明在 L 上若 $\tau=\tau_0$ 使(1)成立，则 $\mathrm{Re}f(\tau)$ 必有极値。

⑪ 采用⑩中記法并置

$$f(\tau)=f(\tau_0)+\frac{1}{2}|f''(\tau_0)|s^2e^{(2\omega+\alpha)i}, \tag{1}$$

于是

$$f(\tau)=g(u_0,v_0)+ih(u_0,v_0)$$
$$+\frac{1}{2}|f''(\tau_0)|s^2\{\cos(2\omega+\alpha)+i\sin(2\omega+\alpha)\}. \tag{2}$$

从此得

$$g(u, v)=g(u_0, v_0)+\frac{1}{2}|f''(\tau_0)|s^2\cos(2\omega+\alpha), \tag{3}$$

$$h(u, v)=h(u_0, v_0)+\frac{1}{2}|f''(\tau_0)|s^2\sin(2\omega+\alpha). \tag{4}$$

置 $\omega=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}$，从 (3.4) 得

$$\tau-\tau_0=se^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)i}. \tag{5}$$

此为一直綫 L 的方程。在此直綫 L 上从 (4) 知

$$h(u, v)=h(u_0, v_0), \tag{6}$$

即能使
$$\operatorname{Im} f(\tau)=\operatorname{Im} f(\tau_0)$$
成立。从(3)知

$$g(u, v)=g(u_0, v_0)-\frac{1}{2}|f''(\tau_0)|s^2.$$

显然当 $s=0$ 时，亦即当 $\tau=\tau_0$ 时 $\operatorname{Re} f(\tau)=g(u, v)$ 有最大值 $g(u_0, v_0)$。注意在(3.4)中置 $\omega=-\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}$ 仍得相同直綫 L，置 $\omega=-\frac{\alpha}{2}$ 或 $\omega=-\frac{\alpha}{2}+\pi$，則得一直綫 L^* 与 L 垂直；在 L^* 上从(4)知(6)仍成立，但从(3)得

$$g(u, v)=g(u_0, v_0)+\frac{1}{2}|f''(\tau_0)|s^2,$$

因而当 $s=0$ 时亦即当 $\tau=\tau_0$ 时，$\operatorname{Re} f(\tau)$ 有最小值。

⑫ 仍采用上面記法，作在三維空間 (u, v, z) 的曲面 S，其方程为

$$z=|e^{\xi f(\tau)}|, \tag{1}$$

这里 ξ 为固定正数。显然(1)可写作

$$z=e^{\xi g(u,v)}, \tag{2}$$

这里 u, v 在 τ 平面变化。从 (2) 求得

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\xi e^{\xi g}\frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\xi e^{\xi g}\frac{\partial g}{\partial v} \tag{3}$$

及

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\xi e^{\xi g}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)+\xi^2 e^{\xi g}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right\}. \tag{4}$$

因 $g(u, v)$ 为正則函数 $f(\tau)$ 的实部，故必为調和函数，是以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0;$$

因而 (4) 化为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\xi^2 e^{\xi g}\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right\}. \tag{5}$$

但在 $\tau=\tau_0$ 处，$f'(\tau_0)=0$，因而 $\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v}=0$；于是从 (3) 及 (5) 得

$$\frac{\partial z}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=0 \tag{6}$$

及

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0. \tag{7}$$

設 $\tau=\tau_0$ 对应于曲面 S 的点为 P_0。从 (6) 知在点 P_0 处 S 有水平切面。又从(7)知判別式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)^2=-\left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)^2\right\}<0;$$

因而在 P_0 处曲面 S 不能有极大或极小，即 P_0 为曲面 S 的鞍点。

⑬ 这里积分路綫为注⑪中直綫 L，其方程为⑪之 (5)。因此在积分上限 $\tau_0-\varepsilon e^{i\omega}$ 及下限 $\tau_0+\varepsilon e^{i\omega}$ 中，$\omega=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}$，同时 (3.5) 公式应为

$$\int_L e^{\xi f(\tau)}g(\tau)d\tau\sim\frac{\sqrt{2\pi}\,g(\tau_0)}{\sqrt{\xi|f''(\tau_0)|}}\;e^{\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)i+\xi f(\tau_0)}.$$

⑭ 这結果可直接从 (3.6) 运用注⑬中公式得出。实际上，

$$f(\tau)=\log\tau-\tau,$$

$$f'(\tau)=\frac{1}{\tau}-1,$$

$$f''(\tau)=-\frac{1}{\tau^2}.$$

因此

$$\tau_0=1,\ f(\tau_0)=-1,\ f''(\tau_0)=-1,\ \arg f''(\tau_0)=\pi=\alpha.$$

所取积分路綫 L 其方程为 $\tau-1=\varepsilon e^{i\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$，即

$$\tau-1=\varepsilon.$$

这就是通过 $\tau=1$ 的实軸。注意 $g(\tau)=\frac{1}{\tau}$，$g(\tau_0)=1$；于是知

$$\Gamma(z)\sim z^z\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{z}}\;e^{i\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-z}=\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}.$$

⑮ 这里公式推导依賴于 Watson 引理。这里敘述过于簡单，讀者欲掌握这段内容，可参閱 Copson 著：Theory of Functions of a Complex Variable，§§ 9.52，9.53。另外 Whittaker 与 Watson 合著 Modern Analysis，§12.33 用 Binet 方法得出 $\Gamma(z)$ 的漸近表示，計算虽較繁但极

易懂。关于 $\Gamma(z)$ 的漸近表示讀者还可参閱馬庫雪維奇著《解析函数論》第七章 4.3 节。

⑯ 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\log\frac{n+1}{n}=0$。欲証明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\frac{k+1}{k}\right)$$

存在，可用下法。令

$$u_k=\int_0^1\frac{t}{n(n+t)}\,dt,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

則

$$u_n=\frac{1}{n}\int_0^1\left(1-\frac{n}{n+t}\right)dt=\frac{1}{n}\Big[\,t-n\log(n+t)\Big]_0^1=\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}.$$

注意当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$0\leqslant\frac{t}{n(n+t)}\leqslant\frac{1}{n^2},$$

是以

$$0<u_n\leqslant\int_0^1\frac{1}{n^2}\,dt=\frac{1}{n^2}.$$

因此以正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与收斂正項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 比較即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收斂。故其部分和

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\log\frac{k+1}{k}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时有极限。

第 2 章

① 設

$$\Psi=U(x,\ y,\ z)T(t),$$

以此代入 (5.2) 中可得

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{1}{a}\cdot\frac{T'(t)}{T(t)}=-\varkappa$$

于是有两个方程:

$$\Delta U+\varkappa U=0\ \text{及}\ T'(t)+\varkappa aT(t)=0.$$

前者是(5.4)型的，后者之解为 $T''(t)=ce^{-\varkappa at}$。类似地对于(5.3)也可利用分离变量的方法得两个方程

$$\Delta U+\varkappa U=0\ \text{及}\ T''(t)+\varkappa c^2T(t)=0,$$

前者是(5.4)型的,后者具有 $e^{-\lambda t}$ 或 $\frac{\cos}{\sin}(\omega t+\alpha)$ 型之解。

② 以 $G_i(\xi_i)$ 的表示式代入 (6.8) 中得到

$$(\varkappa\xi_1^2+\alpha_1\xi_1+\beta_1)(\xi_3-\xi_2)+(\varkappa\xi_2^2+\alpha_2\xi_2+\beta_2)(\xi_1-\xi_3)$$
$$+(\varkappa\xi_3^2+\alpha_3\xi_3+\beta_3)(\xi_2-\xi_1)=-\varkappa(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1).$$

在此,令 $\xi_2=\xi_3=0$, 即得 $\beta_2=\beta_3$. 再令 $\xi_1=\xi_2=0$, 得 $\beta_1=\beta_2$. 于是

$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta.$$

若令 $\xi_2=\xi_3$, 再注意 $\beta_2=\beta_3$, 可得 $\alpha_2=\alpha_3$.

令 $\xi_3=\xi_1$, 再注意 $\beta_1=\beta_3$, 又有 $\alpha_1=\alpha_3$.

合起来就是

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha.$$

③ 在(6.12)中令 ξ 固定而消去 η, φ. 即将其第一、二式平方相加,得

$$x^2+y^2=l^2(\xi^2-1)(1-\eta^2).$$

由第三式知

$$\eta^2=\frac{z^2}{l^2\xi^2},$$

代入上式得

$$\frac{x^2+y^2}{l^2(\xi^2-1)}+\frac{z^2}{l^2\xi^2}=1.$$

此說明坐标平面 ξ 为回轉橢球面。η, φ 面的方程可类似地得出。

④ 举例来說,

$$\sqrt{f(\xi_2)}=\sqrt{(\xi_2-\alpha_1)(\xi_2-\alpha_2)(\xi_2-\alpha_3)}$$
$$=\sqrt{\varepsilon^2(\sin^2\varphi-1)\sin^2\varphi(l^2-\varepsilon+\varepsilon\sin^2\varphi)}$$
$$=\varepsilon\sqrt{-\cos^2\varphi\sin^2\varphi(l^2-\varepsilon\cos^2\varphi)}$$
$$=i\varepsilon l\sin\varphi\cos\varphi,$$

其中略去了和 $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ 同阶的无穷小。

⑤ 我們来推一下 (6.13)。更换 ω 为 Ξ, 对 ξ_1 而言 (6.10) 为

$$\sqrt{f(\xi_1)}\frac{d}{d\xi_1}\left[\sqrt{f(\xi_1)}\frac{d\Xi}{d\xi_1}\right]+\frac{1}{4}(\varkappa\xi_1^2+\alpha\xi_1+\beta)\Xi=0.$$

由
$$\frac{d\Xi}{d\xi_1}=\frac{d\Xi}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\xi_1}=\frac{1}{2l^2\xi}\frac{d\Xi}{d\xi},$$

$$\sqrt{f(\xi_1)}\to l^3\xi(\xi^2-1),$$

$$\xi_1=\alpha_3+l^2\xi^2,$$

代入上式得

$$l^3\xi(\xi^2-1)\frac{1}{2l^2\xi}\cdot\frac{d}{d\xi}\left[l^3\xi(\xi-1)\frac{1}{2l^2\xi}\frac{d\Xi}{d\xi}\right]$$
$$+\frac{1}{4}\left[\varkappa(a_3+l^2\xi^2)^2+\alpha(a_3+l^2\xi^2)+\beta\right]\Xi=0,$$

整理后得

$$(\xi^2-1)\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{d\Xi}{d\xi}\right]$$
$$+\left[\varkappa l^2\xi^4+2a_3\varkappa\xi^2+\alpha\xi^2+\frac{\varkappa a_3^2+\alpha a_3-\beta}{l^2}\right]\Xi=0.$$

同除以 (ξ^2-1)，幷令

$$-\Lambda=\varkappa l^2+2a_3\varkappa+\alpha,\qquad -m^2=\frac{\varkappa a_3^2+\alpha a_3+\beta}{l^2}+\varkappa l^2+2a_3\varkappa+\alpha.$$

即可得 (6.13) 式。(6.14) 及 (6.15) 可类似地推出。

⑥ 比方，

$$z=l\xi\eta-l=l\left[\sqrt{\left(1+\frac{\xi^2}{l}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{l}\right)}-1\right]$$
$$=l\frac{\left(1+\frac{\xi^2}{l}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{l}\right)-1}{\sqrt{\left(1+\frac{\xi^2}{l}\right)\left(1-\frac{\eta^2}{l}\right)}+1}\to\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\text{当 } l\to\infty \text{ 时。}$$

⑦ 記新变量为 ξ'. 利用关系式

$$\xi=\sqrt{1+\frac{\xi'^2}{l}},$$
$$\xi d\xi=\frac{\xi'}{l}d\xi',$$

代入 (6.13) 得

$$\frac{l\xi}{\xi'}\frac{d}{d\xi'}\left[\xi'\cdot\frac{d\Xi}{d\xi'}\right]+\left[\varkappa l^2\left(1+\frac{\xi'^2}{l}\right)-\Lambda-\frac{lm^2}{\xi'^2}\right]\Xi=0.$$

在其中令 $l\to\infty$，注意 $\xi\to1$ 及注解⑤，再换 ξ' 为 ξ 即可得(6.18)之第一式。

⑧ 在 (6.26) 中固定 ξ，消去 η, ϕ，則得方程：

$$\frac{y^2}{l^2(\xi^2-1)}+\frac{x^2}{l^2\xi^2}=1,\quad z=z.$$

此說明坐标面 ξ 为椭圓柱面。

⑨ 参看斯米尔諾夫著《高等数学教程》中譯本第3卷3分册第5章95～98段所述。

⑩ 在所設的条件下，$P(z)$ 及 $Q(z)$ 必具有以下形式：

$$P(z)=\frac{M_{a_1}}{z-a_1}+\frac{M_{a_2}}{z-a_2}+\frac{M_{a_3}}{z-a_3}+g(z),$$

$$Q(z)=\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\left\{\frac{L_{a_1}}{z-a_1}+\frac{L_{a_2}}{z-a_2}+\frac{L_{a_3}}{z-a_3}+h(z)\right\},$$

此处諸 M_{a_j}, $L_{a_j}(j=1,2,3)$ 均为常数。$g(z)$, $h(z)$ 为 z 之多项式。

但 $z=\infty$ 为正則点，由 (7.14) 知

$$\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta^2}P\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$
$$=\frac{2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta}\left\{\frac{M_{a_1}}{1-a_1\zeta}+\frac{M_{a_2}}{1-a_2\zeta}+\frac{M_{a_3}}{1-a_3\zeta}\right\}-\frac{1}{\zeta^2}g\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

及

$$\frac{1}{\zeta^4}Q\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{(1-a_1\zeta)(1-a_2\zeta)(1-a_3\zeta)}$$
$$\cdot\left\{\frac{L_{a_1}}{1-a_1\zeta}+\frac{L_{a_2}}{1-a_2\zeta}+\frac{L_{a_3}}{1-a_3\zeta}+\frac{1}{\zeta}h\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}$$

均应在 $\zeta=0$ 处正則，所以必然有

$$g(z)\equiv h(z)\equiv 0,$$
$$M_{a_1}=M_{a_2}=M_{a_3}=2. \tag{1}$$

于是
$$P(z)=\frac{M_{a_1}}{z-a_1}+\frac{M_{a_2}}{z-a_2}+\frac{M_{a_3}}{z-a_3}$$

$$Q(z)=\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\left\{\frac{L_{a_1}}{z-a_1}+\frac{L_{a_2}}{z-a_2}+\frac{L_{a_3}}{z-a_3}\right\}.$$

設 a_j 处之指数为 λ_j 及 λ'_j，令

$$(z-a_j)P(z)=p^{(a_j)}+p^{(a_j)}(z-a_j)+\cdots,$$
$$(z-a_j)Q(z)=q_0^{(a_j)}+q_1^{(a_j)}(z-a_j)+\cdots,$$

則由 (7.7) 知

$$M_{a_j}=p_0^{(a_j)}=1-\lambda_j-\lambda'_j\quad(j=1,2,3),$$

$$\frac{L_{a_1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=q_0^{(a_1)}=\lambda_1\lambda'_1,$$

$$L_{a_1}=\lambda_1\lambda'_1(a_1-a_2)(a_1-a_3).$$

同样得出 L_{a_2} 和 L_{a_3}。以此代入(7.1)即得方程 (8.1)。并由(1)知(8.2)式成立。

⑪ 事实上，由 (7.6) 式，在点 a_1 附近，$\frac{1}{(z-a_3)^k}$ 正則，所以

$$w_1=\left(\frac{z-a_1}{z-a_3}\right)^k w=(z-a_1)^{\mu+k}\sum_{n=0}^{\infty}c_n'(z-a_1)^n,$$

即指数为 $\mu+k$。

在点 a_3 附近，$(z-a_1)^k$ 为正则，所以

$$w_1=\left(\frac{z-a_1}{z-a_3}\right)^k=(z-a_3)^{\mu-k}\sum_{n=0}^{\infty}c_n'(z-a_3)^n,$$

即指数为 $\mu-k$。

⑫ 事实上，由 (9.10)，(9.11)，再注意 (9.9) 有

$$\begin{aligned}\nu_1+\nu_2+\lambda_1+\lambda_2&=\frac{d+bp_1}{a+2p_1}+\frac{d+bp_2}{a+2p_2}+1-b\\&=\frac{2ad+(ab+2d)(p_1+p_2)+4bp_1p_2}{a^2+2a(p_1+p_2)+4p_1p_2}+1-b\\&=\frac{2ad-a(ab+2d)+4bc}{a^2-2a^2+4c}+1-b\\&=b+1-b=1.\end{aligned}$$

⑬ 以 $w=z^{-\rho}e^{-\alpha z}w_1$ 代入(9.2′)中即得同一形状的方程，和(9.2′)中之 a,c,b,d 相当的分别是

$$\begin{aligned}&a\sim 2\alpha+a,\\&c\sim\alpha^2-a\alpha+c,\\&b\sim b-2\beta,\\&d\sim d+2\alpha\beta-a\beta-b\alpha.\end{aligned}$$

于是，和方程

$$p^2+ap+c=0\quad 及\quad 2pq+aq+bp+d=0$$

相当的是方程

$$p^2+(-2\alpha+a)p+(\alpha^2-a\alpha+c)=0$$

及

$$2pq+(-2\alpha+a)q+(b-2\beta)p+(d+2\alpha\beta-a\beta-b\alpha)=0.$$

若設前两方程之解为 $p_1,p_2;\ -\nu_1,\ -\nu_2$，则后两方程之解必为

$$p_1+\alpha,\ p_2+\alpha;\ -\nu_1-\beta,\ -\nu_2-\beta.$$

和 λ_1,λ_2 相当的是 $\lambda_1+\beta,\lambda_2+\beta$。于是知(9.14)式成立。

第 3 章

① 此处利用 D'Alembert 判别法較为簡便。

$$a_n(z)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n,$$

$$a_{n+1}(z)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)}z^{n+1},$$

因此得
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)z}{(n+1)(\gamma+n)}\right|,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|z|.$$

所以当 $|z|<1$ 时級数絕对收斂；当 $|z|>1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}a_n(z)=0$$

不可能，故級数发散，因此級数的收斂半徑为1。

② 此处引入广义 Gauss 方程。若引入記号 $\vartheta=z\dfrac{d}{dz}$，則 Gauss 微分方程

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0$$

可写为下述簡单的形式

$$\vartheta(\vartheta-\gamma-1)w=z(\vartheta+\alpha)(\vartheta+\beta)w.$$

凡微分方程可写成

$$\vartheta(\vartheta+\beta_1-1)(\vartheta+\beta_2-1)\cdots(\vartheta+\beta_q-1)w$$
$$=z(\vartheta+\alpha_1)(\vartheta+\alpha_2)\cdots(\vartheta+\alpha_p)w$$

之形式者称为广义 Gauss 微分方程或广义超几何微分方程，其解为广义超几何級数，記成(11.7)。

③ 这里所說的求法如下：在(11.3)中令 $\mu=1-\gamma$，然后代入方程(11.1)，順次比較等式两端 z 的同冪的系数立即得

$$a_{n+1}=\frac{(n+1-\gamma+\alpha)(n+1-\gamma+\beta)}{(n+\alpha-\gamma)(n+1)}a_n.$$

令 $\alpha+1-\gamma=\alpha'$，$\beta+1-\gamma=\beta'$，$\alpha-\gamma=\gamma'$ 則上式可化为

$$a_{n+1}=\frac{(n+\alpha')(n+\beta')}{(n+1)(n+\gamma')}a_n.$$

完全类似于在 $z=0$ 近傍第一个特解的討論得知方程(11.1)之第二个特解为

$$w_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha',\beta';\gamma';z)$$
$$=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;\alpha-\gamma;z).$$

④ 此处24个解为

$$w_1=F(\alpha,\beta;\gamma;z),$$
$$w_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;\alpha-\gamma;z),$$
$$w_3=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha;\gamma;z),$$

$$w_4=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\beta,\ 1-\alpha;\ \alpha-\gamma;\ z),$$

$$w_5=(z-1)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{1-z}\right),$$

$$w_6=(z-1)^{-\beta}F\left(\beta,\ \gamma-\alpha;\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{1-z}\right),$$

$$w_7=z^{1-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-1}F\left(1-\gamma+\alpha,\ 1-\beta;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{1-z}\right),$$

$$w_8=z^{1-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1}F\left(1-\gamma+\beta,\ 1-\alpha;\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{1-z}\right),$$

$$w_9=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ 1-\gamma+\alpha;\ 1-\gamma+\alpha+\beta;\ \frac{z-1}{z}\right),$$

$$w_{10}=z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta,\ 1-\beta;\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{z-1}{z}\right),$$

$$w_{11}=z^{\beta}F\left(\beta,\ 1-\gamma+\beta;\ 1-\gamma+\alpha+\beta;\ \frac{z-1}{z}\right),$$

$$w_{12}=z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\ 1-\alpha;\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{z-1}{z}\right),$$

$$w_{13}=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ \frac{z}{z-1}\right),$$

$$w_{14}=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}F\left(1-\gamma+A,\ 1-\beta;\ \alpha-\gamma;\ \frac{z}{z-1}\right),$$

$$w_{15}=(1-z)^{-\beta}F\left(\beta,\ \gamma-\alpha;\ \gamma;\ \frac{z}{z-1}\right),$$

$$w_{16}=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-1-\beta}F\left(1-\gamma+\beta,\ 1-\alpha;\ \alpha-\gamma;\ \frac{z}{z-1}\right),$$

$$w_{17}=F(\alpha,\ \beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z),$$

$$w_{18}=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha;\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-z),$$

$$w_{19}=z^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha,\ 1-\gamma+\beta;\ 1+\alpha+\beta-\gamma;\ 1-z),$$

$$w_{20}=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\beta,\ 1-\alpha;\ \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-z),$$

$$w_{21}=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1;\ \alpha-\beta+1;\ \frac{1}{z}\right),$$

$$w_{22}=z^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1;\ \beta-\alpha+1;\ \frac{1}{z}\right),$$

$$w_{23}=z^{\beta-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta,\ 1-\beta;\ 1+\alpha-\beta;\ \frac{1}{z}\right),$$

$$w_{24}=z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta,\ 1-\alpha;\ 1+\beta-\alpha;\ \frac{1}{z}\right).$$

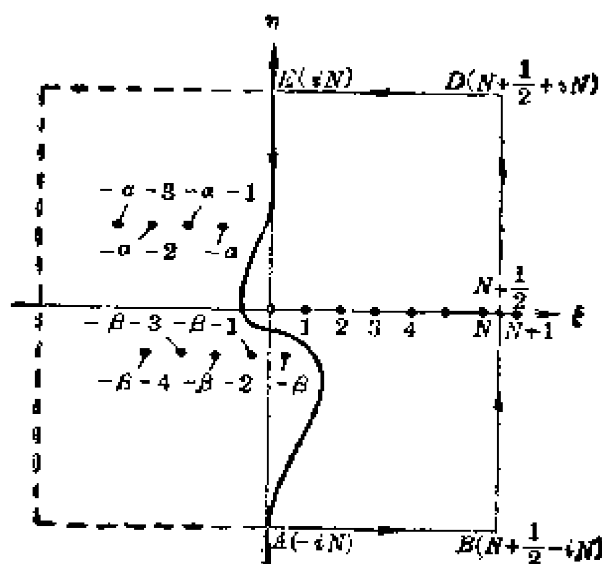
⑤ 此处的討論是不严格的，因若取半圓圍道对被积函数进行估計，得

$$\frac{1}{\pi}|G(\zeta)\Gamma(-\zeta)|=\left|\frac{G(\zeta)}{\Gamma(1+\zeta)\sin\pi\zeta}\right|<BR^{R(\alpha+\beta-\gamma)-1}e^{-\pi R|\sin\theta|},$$

此处 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，及

$$|(-z)^{\zeta}|=\exp\left[R\{\log r\cos\theta+(\pi-\varphi)\sin\theta\}\right].$$

此处 $|z|<1$，$\log r<0$，$|\arg(-z)|=|\varphi-\pi|\leqslant\pi-\varepsilon\ (\varepsilon>0)$，在进行积分估計时一般应用 Jordan 不等式 $\frac{2}{\pi}\theta\leqslant\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，故在最后得出的估計式中必須限定 $R(\alpha+\beta-\gamma)-2<0$ 才能保証当 $R\to\infty$ 时积分趋于 0. 因此这里的推导一般采用矩形圍道較为合适。



此处限制 $|z|<1$，$|\arg(-z)|\leqslant\pi-\varepsilon$，$\varepsilon$ 为任意正数。設 N 为正整数，較 $|\mathrm{Im}\,\alpha|$ 及 $|\mathrm{Im}\,\beta|$ 均大。以 A, B, D, E 順次表 ζ 平面上之四点

$$-iN,\ N+\frac{1}{2}-iN,\ N+\frac{1}{2}+iN,\ iN,$$

取如图所示的封閉圍道 L，它由 AB, BD, DE, EA 組成，AB, BD, DE 均为直綫，AE 为虚軸上自 $-iN$ 至 iN 之一段刻有凹痕。由于在 L 上

$$f(\zeta)=\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)}(-z)^{\zeta}\tag{1}$$

解析，在 L 内 $f(\zeta)$ 有单极点 $\zeta=n$, $n=0,1,2,\cdots N$；且

$$\operatorname*{Res}_{\zeta=n} f(\zeta)=\lim_{\zeta\to n}\left\{(\zeta-n)\Gamma(-\zeta)\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)}(-z)^{\zeta}\right\}$$
$$=-\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)}z^{n}.$$

利用 Cauchy 留数定理得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L} f(\zeta)d\zeta=-\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)}z^{n}.$$

但 $\int_{L} f(\zeta)d\zeta=\int_{AB} f(\zeta)d\zeta+\int_{BD} f(\zeta)d\zeta+\int_{DE} f(\zeta)d\zeta+\int_{EA} f(\zeta)d\zeta$，

所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{AE} f(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{AB} f(\zeta)d\zeta+\int_{BD} f(\zeta)d\zeta-\int_{ED} f(\zeta)d\zeta\right\}$$
$$+\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)}z^{n}. \tag{2}$$

当 $|\zeta|$ 足够大且 $|\arg\zeta|<\pi$ 时，根据 $\Gamma(\zeta)$ 的漸近估計式

$$\Gamma(\zeta)=\sqrt{2\pi}\,\zeta^{\zeta-\frac{1}{2}}e^{-\zeta}\{1+o(1)\}.$$

不难証明

$$\Gamma(\zeta+\lambda)=\Gamma(\zeta)\zeta^{\lambda}\{1+o(1)\},$$

于是即推出

$$\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)\Gamma(1+\zeta)}=\zeta^{\alpha'+i\beta'}\{1+o(1)\},$$

此处 $\alpha'+i\beta'=\alpha+\beta-\gamma-1$。但

$$\zeta^{\alpha'+i\beta'}=e^{(\alpha'+i\beta')(\log|\zeta|+i\arg\zeta)}$$
$$=e^{(\alpha'\log|\zeta|-\beta'\arg\zeta)+i(\beta'\log|\zeta|+\alpha'\arg\zeta)},$$

故 $$\left|\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)\Gamma(1+\zeta)}\right|=|\zeta|^{\alpha'}e^{-\beta'\arg\zeta}\{1+o(1)\}.$$

因此在直綫 AB, BD, DE 上

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)\Gamma(1+\zeta)}\right|<kN^{\alpha'}, \tag{3}$$

此处 k 为常数，与 N 无关。在直綫 AB 上，$\zeta=\sigma-iN$，σ 自 0 变至 $N+\frac{1}{2}$。当 N 足够大时

$$|\Gamma(-\zeta)\Gamma(1+\zeta)|=\frac{\pi}{|\sin(-\pi\zeta)|}=\frac{2\pi}{|e^{+\pi(N+\sigma i)}-e^{-\pi(N+\sigma i)}|}$$
$$\leqslant\frac{2\pi}{e^{\pi N}-e^{-\pi N}}<4\pi e^{-\pi N},$$

$$|(-z)^\zeta| = |e^{(\sigma-iN)(\log|z|+i\arg(-z))}| = |z|^\sigma e^{N\arg(-z)}.$$

由于　　$-(\pi-\varepsilon)\leqslant\arg(-z)\leqslant\pi-\varepsilon,$

故(1)可改写为

$$f(\zeta)=\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)\Gamma(1+\zeta)}\Gamma(-\zeta)\Gamma(1+\zeta)(-z)^\zeta.$$

利用上述估計得

$$\begin{aligned}|f(\zeta)| &= \left|\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)\Gamma(1+\zeta)}\right| |\Gamma(-\zeta)\Gamma(1+\zeta)(-z)^\zeta| \\ &< (kN^{\alpha'})(4\pi e^{-\pi N})(|z|^\sigma e^{N(\pi-\varepsilon)}) \\ &= 4\pi kN^{\alpha'} e^{-\varepsilon N}|z|^\sigma. \end{aligned} \tag{4}$$

于是

$$\left|\int_{AB} f(\zeta)d\zeta\right| \leqslant \int_{AB} |f(\zeta)||d\zeta| < 4\pi kN^{\alpha'}e^{-\varepsilon N}\int_0^{N+\frac{1}{2}}|z|^\sigma d\sigma.$$

由于 $|z|<1$，故

$$\int_0^{N+\frac{1}{2}}|z|^\sigma d\sigma < \int_0^{N+\frac{1}{2}} d\sigma = N+\frac{1}{2}.$$

由此　　$\left|\int_{AB} f(\zeta)d\zeta\right| < 2\pi k(2N+1)N^{\alpha'}e^{-\varepsilon N},$

故

$$\lim_{N\to\infty}\int_{AB} f(\zeta)d\zeta = 0. \tag{5}$$

在直綫 ED 上，$\zeta=\sigma+iN$，σ 自 0 变至 $N+\frac{1}{2}$，此时不等式(3)，(4)仍成立。故可用同法証明

$$\lim_{N\to\infty}\int_{ED} f(\zeta)d\zeta = 0. \tag{6}$$

在直綫 BD 上，$\zeta=N+\frac{1}{2}+it$，t 自 $-N$ 变至 N，此时

$$|\Gamma(-\zeta)\Gamma(1+\zeta)| = \frac{\pi}{\left|\sin\pi\left(-N-\frac{1}{2}-it\right)\right|} = \frac{\pi}{|\cosh\pi t|} < 2\pi e^{-\pi|t|},$$

$$|(-z)^\zeta| = |z|^{N+\frac{1}{2}}e^{-t\arg(-z)},$$

于是　　$|f(\zeta)| < 2\pi kN^{\alpha'}|z|^{N+\frac{1}{2}}e^{-\pi|t|-t\arg(-z)},$

当 $t\geqslant 0$ 时，

$$-\pi|t|-t\arg(-z) = -|t|\{\pi+\arg(-z)\} \leqslant -|t|\varepsilon.$$

当 $t<0$ 时，

$$-\pi|t|-t\arg(-z)=-|t|\{\pi-\arg(-z)\}\leqslant-|t|\varepsilon.$$

所以 $$|f(\zeta)|<2\pi kN^{\alpha'}|z|^{N+\frac{1}{2}}e^{-|t|\varepsilon},$$

$$\left|\int_{BD}f(\zeta)d\zeta\right|\leqslant\int_{BD}|f(\zeta)||d\zeta|<2\pi kN^{\alpha'}|z|^{N+\frac{1}{2}}\int_{-N}^{N}e^{-\varepsilon|t|}dt.$$

但 $$\int_{-N}^{N}e^{-\varepsilon|t|}dt=2\int_{0}^{N}e^{-\varepsilon t}dt\leqslant\frac{2}{\varepsilon},$$

故 $$\left|\int_{BD}f(\zeta)d\zeta\right|<\frac{4\pi kN^{\alpha}|z|^{N+\frac{1}{2}}}{\varepsilon},$$

由于 $|z|<1$，故

$$\lim_{N\to\infty}\int_{BD}f(\zeta)d\zeta=0. \tag{7}$$

故在(2)中令 $N\to\infty$，应用 (5)，(6)，(7) 则得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{AE}f(\zeta)d\zeta=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)}z^{n},$$

即 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{\Gamma(\alpha+\zeta)\Gamma(\beta+\zeta)}{\Gamma(\gamma+\zeta)}\Gamma(-\zeta)(-z)^{\zeta}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^{n}}{n!}.$$

由此得出了 $|z|<1$，$|\arg(-z)|\leqslant\pi-\varepsilon$，$\varepsilon>0$ 的超几何級数的 Barnes 积分公式。

⑥ 通过 Barnes 积分經簡单的討論可将超几何函数自单位圓内 $|z|<1$ 向圓外解析延拓。

为此可在 z 平面沿实軸自 0 至 $+\infty$ 作一沟，在此有沟的平面的任一閉域 D 中，所有的 z 滿足不等式

$$|\arg(-z)|\leqslant\pi-\varepsilon,$$

ε 为某一确定之正数。令 $\zeta=it$，t 为实数，則 $|\zeta|=|t|$，$\arg\zeta=\frac{\pi}{2}$，于是易証

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+it)\Gamma(\beta+it)}{\Gamma(\gamma+it)\Gamma(1+it)}\right|=|t|^{\alpha'}e^{-\beta'\frac{\pi}{2}}\{1+o(1)\},$$

$$|\Gamma(-it)\Gamma(1+it)|=\frac{\pi}{|\sin i\pi t|}\leqslant4\pi e^{-\pi|t|},$$

$$|(-z)^{\zeta}|=e^{-t\arg(-z)},$$

此处 $\alpha'+i\beta'=\alpha+\beta-\gamma-1$。由上述之估計得在 C 上，

$$|G(\zeta)(-z)^{\zeta}\Gamma(-\zeta)|\leqslant K|t|^{\alpha'}e^{-\pi|t|-t\arg(-z)}\leqslant K|t|^{\alpha'}e^{-\varepsilon t},$$

此处 K 为常数，与 z 及 t 无关。但广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{\alpha'}e^{-\varepsilon t}\,dt=2\int_{0}^{+\infty}t^{\alpha'}e^{-\varepsilon t}dt$$

收敛，故上述积分在 D 中匀敛，因此在有沟 z 面上表示解析函数。

⑦ 此外，我們常称超几何函数 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 之参数 α,β,γ 中一个增加或减少 1 所得的超几何函数为 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 之相邻的超几何函数。

$$F(\alpha+1,\beta;\gamma;z),\ F(\alpha-1,\beta;\gamma;z),\ F(\alpha,\beta+1;\gamma;z),$$

$$F(\alpha,\beta-1;\gamma;z),\ F(\alpha,\beta;\gamma+1;z),\ F(\alpha,\beta;\gamma-1;z),$$

順次以 $F_{\alpha+},F_{\alpha-},F_{\beta+},F_{\beta-},F_{\gamma+},F_{\gamma-}$ 表示之。Gauss 曾証明在 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 与任意二相邻超几何函数之間存在一綫性关系，其系数为多项式。此种关系共有 15 个，可以从級数之定义求出，例如

$$(\alpha-\beta)F=\alpha F_{\alpha+}-\beta F_{\beta+}.$$

⑧ 此处 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$

$$=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot\oint^{(1+0+1-0-)}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds$$

$$=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot\oint^{(1+0+1-0-)}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta-1}ds$$

$$-z\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot\oint^{(1+0+1-0-)}s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta-1}ds$$

$$=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot\oint^{(1+0+1-0-)}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta-1}ds$$

$$-z\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma[(\gamma+1)-(\alpha+1)]}{\Gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{1}{(1-e^{2\pi i(\alpha+1)})(1-e^{2\pi i[(\gamma+1)-(\alpha+1)]})}\cdot\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma[(\gamma+1)-(\alpha+1)]}\cdot\oint^{(1+0+1-0-)}s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-(\beta+1)}ds$$

$$=F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)-z\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+1)}$$

$$\cdot F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z).$$

⑨ 关于公式 $K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)$

及 $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)$,

其中 k 是在区域 $|\arg(1\pm k)|<\pi$ 内的复数，暂时設 $|k|<1$ 而利用二項式展开式則得

$$K(k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n}k^{2n},$$

从而得

$$K(k)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right).$$

同样可得

$$E(k)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right).$$

第 4 章

① 从直角坐标的 Laplace 方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0$$

化为球坐标 (r,θ,φ).

令 $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta$.

将变换分两部进行，首先令 $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$（保留 z 不变），再令 $z=r\cos\theta,\ \rho=r\sin\theta$（保留 φ 不变）。

經第一次变換得

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}.$$

經第二次变換有

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r};$$

及
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}=\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}.$$

代入上式，最后得

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$$
$$=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}.$$

亦可写成

$$\Delta\Psi=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\Lambda}{r^2}\Psi=0,$$

$$\Lambda=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

② $$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}^{(1+,z+)}\frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu(t-z)^{\nu+1}}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}^{(1+,z+)}\left[\frac{t^2-1}{2(t-z)}\right]^\nu\frac{dt}{(t-z)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_D\frac{s^\nu ds}{\sqrt{s^2-2sz+1}}.$$

③ 这是由于多项式 $(z^2-1)^n$ 为 $2n$ 次，以 $z=\pm1$ 为其 n 阶零点；多项式 $\frac{d}{dz}(z^2-1)^n$ 为 $2n-1$ 次，以 $z=\pm1$ 为其 $n-1$ 阶零点。根据 Rolle 定理知此多项式应还有一零点 α，且 $-1<\alpha<1$，±1 及 α 为此多项式之所有零点。多项式 $\frac{d^2}{dz^2}(z^2-1)^n$ 为 $2n-2$ 次，以 $z=\pm1$ 为其 $n-2$ 阶零点。根据 Rolle 定理知此多项式应还有两零点，一在区間 $(-1,\alpha)$ 之內部，一在区間 $(\alpha,1)$ 之內部，除此以外无其他零点。以此类推，$\frac{d^3}{dz^3}(z^2-1)^n$ 为 $2n-3$ 次多項式，以 $z=\pm1$ 为 $n-3$ 阶零点，另外还有三个单零点在区間 $(-1,1)$ 之內部，且各不相同。$\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ 为 n 次多項式，$z=\pm1$ 不为其零点，其所有 n 个零点，互不相同，在区間 $(-1,1)$ 之內部。

④ 此处亦即由 $P_n(z)$ 所滿足之微分方程推出。此时将方程 (17.1) 改写为

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dw}{dz}\right\}+\nu(\nu+1)w=0,$$

故
$$\frac{d}{dz}\{(1-z^2)P_n'\}+n(n+1)P_n=0,\tag{1}$$

$$\frac{d}{dz}\{(1-z^2)P_m'\}+m(m+1)P_m=0.\tag{2}$$

設 $n\neq m$，以 P_m 乘 (1)，P_n 乘 (2)，然后相减得

$$P_m \frac{d}{dz}\{(1-z^2)P'_n\}-P_n\frac{d}{dz}\{(1-z^2)P'_m\}$$
$$+(n-m)(n+m+1)P_nP_m=0,$$

即 $$(m-n)(m+n+1)P_nP_m$$
$$=P_m\frac{d}{dz}\{(1-z^2)P'_n\}-P_n\frac{d}{dz}\{(1-z^2)P'_m\}$$
$$=\frac{d}{dz}\{(1-z^2)(P_mP'_n-P_nP'_m)\}.$$

将等式两端对 z 积分即得

$$(m-n)(m+n+1)\int_{z_1}^{z_2}P_mP_ndz=\Big[(1-z^2)(P_mP'_n-P_nP'_m)\Big]_{z_1}^{z_2}, \tag{3}$$

再应用关系式

$$(z^2-1)P'_n=nzP_n-nP_{n-1},\ (z^2-1)P'_m=mzP_m-mP_{m-1},$$

将其代入 (3) 得

$$(m-n)(m+n+1)\int_{z_1}^{z_2}P_mP_ndz$$
$$=\Big[-P_m(nzP_n-nP_{n-1})+P_n(mzP_m-mP_{m-1})\Big]_{z_1}^{z_2}$$
$$=\Big[nP_{n-1}P_m-mP_{m-1}P_n+(m-n)zP_nP_m\Big]_{z_1}^{z_2},$$

即

$$\int_{z_1}^{z_2}P_m(z)P_n(z)dz=\left[\frac{nP_{n-1}P_m-mP_{m-1}P_n+(m-n)zP_mP_n}{(m-n)(m+n+1)}\right]_{z_1}^{z_2}. \tag{4}$$

在(4)中置 $z_1=-1$, $z_2=1$, 立即推出

$$\int_{-1}^{1}P_m(z)P_n(z)dz=0,\quad m\neq n.$$

现在求$\int_{z_1}^{z_2}P_n^2(z)dz$。由于

$$(2n+1)P_n^2-(2n-1)P_{n-1}^2=2nP_n^2-2nP_{n-1}^2+P_n^2+P_{n-1}^2$$
$$=2P_n(zP'_n-P'_{n-1})-2P_{n-1}(P'_n-zP'_{n-1})+P_n^2+P_{n-1}^2$$
$$=2z(P_nP'_n+P_{n-1}P'_{n-1})-2(P_nP'_{n-1}+P_{n-1}P'_n)+P_n^2+P_{n-1}^2$$
$$=\frac{d}{dz}\{z(P_n^2+P_{n-1}^2)-2P_nP_{n-1}\}.$$

将此式对 z 积分得

$$(2n+1)\int_{z_1}^{z_2}P_n^2dz-(2n-1)\int_{z_1}^{z_2}P_{n-1}^2dz=\Big[zP_n^2+zP_{n-1}^2-2P_{n-1}P_n\Big]_{z_1}^{z_2}.$$

然后令 $n=1, 2, 3, \cdots, n$ 得

$$3\int_{z_1}^{z_2}P_1^2dz-\int_{z_1}^{z_2}P_0^2dz=\Big[zP_1^2+zP_0^2-2P_0P_1\Big]_{z_1}^{z_2},$$

$$5\int_{z_1}^{z_2}P_2^2dz-3\int_{z_1}^{z_2}P_1^2dz=\Big[zP_2^2+zP_1^2-2P_1P_2\Big]_{z_1}^{z_2},$$

$$7\int_{z_1}^{z_2}P_3^2dz+5\int_{z_1}^{z_2}P_2^2dz=\Big[zP_3^2+zP_2^2-2P_2P_3\Big]_{z_1}^{z_2},$$

…………………………………………………………

$$(2n+1)\int_{z_1}^{z_2}P_n^2dz-(2n-1)\int_{z_1}^{z_2}P_{n-1}^2dz=\Big[zP_n^2+zP_{n-1}^2-2P_{n-1}P_n\Big]_{z_1}^{z_2}.$$

将这些等式相加得

$$(2n+1)\int_{z_1}^{z_2}P_n^2dz-\int_{z_1}^{z_2}P_0^2dz=\Big[zP_0^2+2z(P_1^2+P_2^2+\cdots+P_{n-1}^2)$$

$$+zP_m^2-2(P_0P_1+P_1P_2+\cdots+P_{m-1}P_m)\Big]_{z_1}^{z_2}.$$

由于 $P_0(z)=1$, $P_1(z)=z$, 故

$$(2n+1)\int_{z_1}^{z_2}P_n^2(z)\,dz=\Big[2z(P_1^2+P_2^2+\cdots+P_{m-1}^2)$$

$$+zP_n^2-2(P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{m-1}P_m)\Big]_{z_1}^{z_2}. \qquad (5)$$

在(5)中置 $z_1=-1$, $z_2=1$, 得

$$(2n+1)\int_{-1}^{1}P_n^2(z)\,dz=\Big[2z(P_1^2+P_2^2+\cdots+P_{n-1}^2)$$

$$+zP_n^2-2(P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n)\Big]_{-1}^{1}$$

$$=2(n-1)+1-2(n-1)+2(n-1)+1-2(n-1)=2.$$

即

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(z)\,dz=\frac{2}{2n+1}.$$

⑤ 由

$$Q_n(z)=P_n(z)\int_z^{\infty}\frac{dt}{(t^2-1)[P_n(t)]^2}, \qquad (1)$$

設 n 为非負整数，則 $P_n(z)$ 为多項式，它有 n 个单零点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 均在实軸上 $(-1, 1)$ 之内部，于是

$$\frac{1}{(z^2-1)[P_n(z)]^2}=\frac{1}{(z-1)(z+1)(z-z_1)^2(z-z_2)^2\cdots(z-z_n)^2}.$$

从部分分式定理知此有理函数可用部分分式之和表出，其形式为

$$\frac{1}{(z^2-1)[P_n(z)]^2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{a_r}{z-z_r}+\frac{b_r}{(z-z_r)^2}\right\}. \qquad (2)$$

以 (z^2-1) 乘此式两端得

$$\frac{1}{[P_n(z)]^2}=A(z+1)+B(z-1)+(z^2-1)\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{a_r}{z-z_r}+\frac{b_r}{(z-z_r)^2}\right\}$$

在此式中顺次令 $z=1$ 及 $z=-1$，得

$$A=\frac{1}{2} \text{ 及 } B=-\frac{1}{2}.$$

从 (3) 知

$$a_r=\operatorname*{Res}_{z=z_r}\frac{1}{(z^2-1)[P_n(z)]^2}.$$

令
$$P_n(z)=(z-z_r)F(z), \tag{3}$$

则 $F(z)$ 为 $n-1$ 次多项式，且 $F(z_r)\neq 0$. 于是

$$\frac{1}{(z^2-1)[P_n(z)]^2}=\frac{1}{(z-z_r)^2}\Phi(z),$$

此处
$$\Phi(z)=\frac{1}{(z^2-1)\{F(z)\}^2}.$$

又因
$$\Phi'(z)=\frac{-2\{zF(z)-(1-z^2)F'(z)\}}{(1-z^2)^2\{F(z)\}^3},$$

所以
$$a_r=\frac{\Phi'(z_r)}{r!}=\frac{-2\{z_rF'(z_r)-(1-z_r^2)F''(z_r)\}}{(1-z_r^2)\{F(z_r)\}^3}.$$

从 (3) 得
$$P_n'(z)=(z-z_r)F'(z)+F(z),$$
$$P_n''(z)=(z-z_r)F''(z)+2F'(z),$$

由于 $P_n(z)$ 满足 Legendre 微分方程

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+n(n+1)w=0, \tag{4}$$

以上述二式及(3)代入(4)得

$$(1-z^2)\{(z-z_r)F''(z)-2zF'(z)+n(n+1)F(z)$$
$$+2\{(1-z^2)F'(z)-zF(z)\}=0.$$

以 $z=z_r$ 代入此式得

$$(1-z_r^2)F'(z_r)-z_rF(z_r)=0.$$

所以 $a_r=0$，$r=1,2,\cdots,n$. 以 A，B 及 a_r 之值代入(2)得

$$\frac{1}{(z^2-1)[P_n(z)]^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}+\sum_{r=1}^{n}\frac{b_r}{(z-z_r)^2},$$

以此代入 (1) 得

$$Q_n(z)=P_n(z)\int_z^{\infty}\left\{\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}+\sum_{r=1}^{n}\frac{b_r}{(z-z_r)^2}\right\}dz$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1}+P_n(z)\sum_{r=1}^{n}\frac{b_r}{z-z_r}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{1}{2} P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z)\right\},$$

此处 $W_{n-1}(z)$ 为 $n-1$ 次多项式。

⑥ 此处亦可由方程(18.1)导出。方程(18.1)可改写为

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dw}{dz}\right\}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{m}{1-z^2}\right\}w=0.$$

由于 P_n^m, P_l^m 为此方程之解,故可直接推得

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left[P_l^m\frac{d}{dx}(P_n^m)-P_n^m\frac{d}{dx}(P_l^m)\right]\right\}$$
$$+(n-l)(m+l+1)\cdot P_n^m P_l^m=0.$$

自 -1 至 $+1$ 积分,当 $n\neq l$ 时得

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_l^m(x)dx=0.$$

至于 $n=l$ 的情形,可根据遞推公式得出相应的結果。

⑦ 現在証明二个不同阶球函数 $Y_n(\theta,\varphi)$ 和 $Y_m(\theta,\varphi)$ $(n\neq m)$ 在单位球面 S 上的正交性,即

$$\iint_S Y_n(\theta,\varphi)Y_m(\theta,\varphi)dS=0,\quad n\neq m.$$

設 V 为球面所包圍的实体,S 为球面,对調和函数

$$\Psi_n=r^nY_n(\theta,\varphi)\text{ 和 }\Psi_m=r^mY_m(\theta,\varphi),$$

应用 Green 公式得

$$\iint_S\left(\Psi_n\frac{\partial\Psi_m}{\partial n}-\Psi_m\frac{\partial\Psi_n}{\partial n}\right)dS=\iiint_V(\Psi_n\Delta\Psi_m-\Psi_m\Delta\Psi_n)dV,$$

其中
$$\Delta\Psi_n=\Delta\Psi_m=0.$$

在目前的情形下,法綫方向的导数是关于半徑 r 的导数,故由上式得

$$\iint_S[mY_n(\theta,\varphi)Y_m(\theta,\varphi)-nY_m(\theta,\varphi)Y_n(\theta,\varphi)]dS=0.$$

因 $n\neq m$,所以立即証得其正交性。

第 5 章

① 令
$$w(z)=f(z,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mu)z^{n+\mu},$$

代入方程(20.1),整理后得到級数

$$\mu(\mu-1+\gamma)a_0z^{\mu-1}+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1+\mu)(n+\mu+\gamma)a_{n+1}$$
$$-(n+\mu+\alpha)a_n]z^{n+\mu}=0.$$

于是得到 $a_n(\mu)$ 满足的方程組

$$\mu(\mu-1+\gamma)a_0=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+\mu)(n+\mu+\gamma-1)a_n-(n-1+\mu+\alpha)a_{n-1}=0, \quad n=1,2,\cdots,$$

因此指数方程

$$\mu(\mu-1+\gamma)=0$$

的根是

$$\mu=0, \quad \mu=1-\gamma.$$

如果取 $a_0=1$，則由 a_n 的遞推公式求得(20.6)。显然，对应于 $\mu=0$ 的就是合流型超几何級数 $F(\alpha;\gamma;z)$，即

$$F(\alpha;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(0)z^n.$$

如果取 $\gamma=1$，則有

$$F(\alpha;1;z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(0)\big|_{\gamma=1}z^n.$$

② 这里和前一个式子应注意 $\gamma=1$，因此 p. 96 的公式似乎都应标明 $\gamma=1$，即

$$\frac{\partial}{\partial\mu}f(z,\mu)\Big|_{\substack{\mu=0\\ \gamma=1}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(0)\Big|_{\gamma=1}z^n+F(\alpha;1;z)\log z,$$

$$\frac{a_n'(0)}{a_n(0)}\Big|_{\gamma=1}=\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\log a_n(\mu)\right]_{\substack{\mu=0\\ \gamma=1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha+k}-\frac{2}{1+k}\right),$$

$$a_n(0)\big|_{\gamma=1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(n!)^2}.$$

③ 这里要注意 $\gamma=m+1$，計算和公式 (20.6′) 类似。

④ 公式 (22.2) 可能有錯。事实上，采用公式 (22.2) 下方关于 α_m 的記法，根据已知的公式(参看 Whittaker-Watson 合著：A Course of Modern Analysis, § 16.3) 即得

$$\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}=\sum_{m=0}^{N}\binom{\gamma-\alpha-1}{m}\left(\frac{t}{z}\right)^m+R_N$$

$$=\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m(\alpha-\gamma+1)_m}{m!}\left(\frac{t}{z}\right)^m+R_N.$$

其中

$$R_N=\frac{\alpha_{N+1}}{N!}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{t}{z}}u^N(1+u)^{-\alpha-1}du.$$

代入 (22.1) 得

$$G_1(\alpha;\gamma;z)=\frac{1}{i\sin\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}$$

$$\cdot\left[\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m(\alpha-\gamma-1)_m}{m!}z^{-m}\int_{\infty}^{0+}t^{\alpha+m-1}e^{-t}dt+\int_{\infty}^{0+}t^{\alpha-1}R_Ne^{-t}dt\right].$$

根据公式 (2.3)，前一項中的积分可用 Γ 函数表出，即

$$\int_{\infty}^{0+}t^{\alpha+m-1}e^{-t}dt=2i\sin\pi(\alpha+m)\cdot e^{\pi i(\alpha+m)}\Gamma(\alpha+m)$$

$$=(-1)^m2i\sin\pi\alpha\cdot e^{\pi i\alpha}\cdot(\alpha+m)(\alpha+m-1)\cdots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

$$=(-1)^m2i\sin\pi\alpha\cdot e^{\pi i\alpha}\alpha_m\Gamma(\alpha).$$

运用 Whittaker-Watson 书 §16.3 中关于 R_N 的估計，类似地可以估計出第二項积分

$$\left|\int_{\infty}^{0+}t^{\alpha-1}R_Ne^{-t}dt\right|=o(z^{-N}).$$

于是

$$G_1(\alpha;\gamma;z)=2e^{\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}\left[1+\sum_{m=1}^{N}\frac{\alpha_m(\alpha-\gamma+1)_m}{m!}z^{-m}+o(z^{-N})\right],$$

$$-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.$$

不难看出公式 (22.2) 中多了个 $(-1)^m$。

由我們推出的公式利用 (21.16) 即可由 (22.2) 推出公式 (22.3)。

⑤ 关于函数 $W_{\varkappa,\mu}(z)$ 的漸近公式，在 Whittaker-Watson 的书中 (§16.3, p.343) 有更精确的公式：

$$W_{\varkappa,\mu}(z)\sim e^{-\frac{1}{2}z}z^{\varkappa}$$

$$\cdot\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\mu^2-\left(\varkappa-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\mu^2-\left(\varkappa-\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[\mu^2-\left(\varkappa-n+\frac{1}{2}\right)^2\right]}{n!z^n}\right\},$$

这里 $|z|$ 足够大，$|\arg z|\leqslant\pi-\alpha<\pi$。

Whittaker 在他的书中从函数 $W_{\varkappa,\mu}(z)$ 的圍道积分表示利用类似于我們这里的方法直接証明了这个公式，参看該书 §16.3。

⑥ 关于 $F(\alpha;\gamma;z)$ 的遞推公式，很容易从公式 (20.4) 出发直接証明。只需将 (20.4) 代入下面四个公式的两端，然后設法証明它們都是恒等的即可。这四个遞推公式就是

$$F(\alpha+1;\gamma;z)=F(\alpha;\gamma;z)+\frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}F(\alpha;\gamma;z),$$

$$F(\alpha-1;\gamma;z)=F(\alpha;\gamma;z)+\frac{z}{\alpha\cdot\gamma}\left[F(\alpha;\gamma;z)-\frac{d}{dz}F(\alpha;\gamma;z)\right],$$

$$F(\alpha;\gamma+1;z)=\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left[\frac{d}{dz}F(\alpha;\gamma;z)-F(\alpha;\gamma;z)\right],$$

$$F(\alpha;\ \gamma-1;\ z)=F(\alpha;\ \gamma;\ z)+\frac{z}{\gamma-1}\ \frac{d}{dz}F(\alpha;\ \gamma;\ z).$$

在爱尔台里主編的«高級超越函数»书中，上式左端的四个函数称为邻接于 $F(\alpha;\ \gamma;\ z)$ 的函数(不过在該书中采用 $\Phi(a;\ c;\ x)$ 表示合流型超几何函数)。关于这方面，讀者可参考該书的第一册第六章6·4：Φ 函数的初等关系，在那里給出 $\Phi(a;\ c;\ x)$ 和它的邻接函数之間的关系，并且利用微分法得到公式(9)，那个公式(9)如果用我們用的記法就是上述四个公式中的最后一个。

如果象作者那样引入所謂对于 $F(\alpha;\ \gamma;\ z)$ 的 α 及 γ 分別增減1的运算子 $\overset{(\alpha)}{T}$，$\underset{(\alpha)}{T}$，$\overset{(\gamma)}{T}$，$\underset{(\gamma)}{T}$，即由下式定义运算子 $\overset{(\alpha)}{T}$，$\underset{(\alpha)}{T}$，$\overset{(\gamma)}{T}$，$\underset{(\gamma)}{T}$：

$$\overset{(\alpha)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=F(\alpha+1;\ \gamma;\ z),$$

$$\underset{(\alpha)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=F(\alpha-1;\ \gamma;\ z),$$

$$\overset{(\gamma)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=F(\alpha;\ \gamma+1;\ z),$$

$$\underset{(\gamma)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=F(\alpha;\ \gamma-1;\ z),$$

那末前面的递推公式就可写成

$$\overset{(\alpha)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=\left(1+\frac{z}{\alpha}\ \frac{d}{dz}\right)F(\alpha;\ \gamma;z),$$

$$\underset{(\alpha)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=\left[1+\frac{z}{\alpha-\gamma}\left(1-\frac{d}{dz}\right)\right]F(\alpha;\ \gamma;\ z),$$

$$\overset{(\gamma)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=\left[\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(\frac{d}{dz}-1\right)\right]F(\alpha;\ \gamma;\ z),$$

$$\underset{(\gamma)}{T}F(\alpha;\ \gamma;\ z)=\left[1+\frac{z}{\gamma-1}\ \frac{d}{dz}\right]F(\alpha;\ \gamma;\ z).$$

因此运算子

$$\overset{(\alpha)}{T}=1+\frac{z}{\alpha}\ \frac{d}{dz},$$

$$\underset{(\alpha)}{T}=1+\frac{z}{\alpha-\gamma}\left(1-\frac{d}{dz}\right),$$

$$\overset{(\gamma)}{T}=\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}\left(\frac{d}{dz}-1\right),$$

$$\underset{(\gamma)}{T}=1+\frac{z}{z-1}\ \frac{d}{dz}.$$

这就是(23.4)的前半段。再利用直接微分很易驗証(23.4)的后半段。

利用(23.4)是十分方便的，例如很快地能得到

$$\overset{(\gamma+1)(\gamma)}{T\ \ T} = \frac{\gamma+1}{\alpha-\gamma-1}\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}e^z\frac{d^2}{dz^2}[e^{-z},$$

这就是說，我們得到一个公式

$$F(\alpha;\gamma+2;z) = \frac{\gamma+1}{\alpha-\gamma+1}\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}e^z\frac{d^2}{dz^2}[e^{-z}F(\alpha;\gamma;z)].$$

不仅如此，引用这样的运算子还可以系統地研究一系列特殊函数的遞推公式，例如，参看犬井鉄郎的論文 Unified Theory of Recurrence Formulas. I. II. Progress of Theoretical Physics, Vol. III p. 168～187, p. 244～261。

在最近几年出版的有关特殊函数的日文书籍例如共立出版株式会社出版的《特殊函数論》(現代数学讲座 5-B) 中差不多都采用这样的运算子.

⑦ 由于 $z=0$ 是 Sonine 微分方程

$$zw''+(\mu+1-z)w'+nw=0$$

的正則奇异点，利用第2章的知識可以断定 Sonine 微分方程与正則解綫性无关解是以 $z=0$ 为奇异点的，而 $S_n^\mu(z)$ 是正則的，故与正則解 (24.17) 的比为常数。

⑧ 即通常在复变函数論书中所說的关于解析函数高阶导数的定理：如果 $f(z)$ 在某一开域 (D) 内解析，則

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

C 是开域 (D) 内任一包圍 z 点的閉圍道。

⑨ 关于氫原子波函数的討論可以参看吉洪諾夫与薩馬尔斯基合著《数学物理方程》下册的附篇第三部分或布洛欣采夫著《量子力学原理》上册 § 49。

⑩ 对于一般的固有値問題都可以証明所謂正交性，即对应于不同固有値的固有函数都是正交的，在所有数理方程的教科书中都可找到有关的証明。

⑪ 有关抛物柱函数可以参看 Whittaker-Watson 书的 § 16.5。

⑫ 有关 Hermite 多項式及其应用可以参看吉洪諾夫与薩馬尔斯基书的附篇第三部分。

第 6 章

① 求 Laplace 方程形为

$$v=F_1(\theta)F_2(r)F_3(z)$$

之解，分离变量后，可得

$$F_3(z)=c_1e^{kz}+c_2e^{-kz},$$

$$F_1(\theta)=c_3\cos\nu\theta+c_4\sin\nu\theta.$$

若令 $x=kr$，則 $F_2(x)$ 滿足方程

$$x^2\frac{d^2F_2(x)}{dx^2}+x\frac{dF_2(x)}{dx}+(x^2-\nu^2)F_2(x)=0.$$

② 由 $0<\theta+\alpha<\pi$，α 最大可为 $-\theta+\pi$，最小可为 $-\theta$，即在以 $-\theta+\frac{\pi}{2}$ 为中心，$\pm\frac{\pi}{2}$ 間变动。

③ 事实上，要求 $\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}$ 即可。

④ 参看 78 頁，把积分路綫 c_1 变形成图 17.4，則

$$\begin{aligned}
w_1(z)&=A_1z^\nu\int_{c_1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\left[A_1z^\nu\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{(\nu-\frac{1}{2})\pi i}e^{izt}dt\right.\\
&\qquad\left.+\int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-(\nu-\frac{1}{2})\pi i}e^{izt}dt+g_\varepsilon\right]\\
&\qquad(g_\varepsilon\to0 \text{ 当 } \varepsilon\to0)\\
&=A_1z^\nu\left[e^{(\nu-\frac{1}{2})\pi i}-e^{-(\nu-\frac{1}{2})\pi i}\right]\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{izt}dt\\
&=2iA_1z^\nu\sin\pi\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\int_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt.
\end{aligned}$$

⑤ 下面利用了公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}\theta\sin^{n-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)}.$$

⑥ 設 $J_{-\nu}(z)=Az^\nu\int_{c_1}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$.

由上述知，当 $z\to0$ 时 z^ν 之系数是

$$A\frac{e^{-\nu\pi i}2\pi i\sqrt{\pi}\,2^{2\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(1-\nu)}. \tag{*}$$

另一方面，在 (26.10) 中令 $\nu\to-\nu$，$z\to0$ 得 z^ν 之系数是

$$\frac{2^\nu}{\Gamma(1-\nu)}. \tag{**}$$

比較 (*) 及 (**) 即得

$$A=e^{\nu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2^{\nu}2\pi i\sqrt{\pi}}.$$

⑦　下面利用到公式：

$$\psi(n+p+1)=-\frac{1}{n+p+1}-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n+p+1}\right\}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+p}-\gamma.$$

⑧　事实上，

$$H_{\nu}^{1}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\ \nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}}\ e^{i\left(z+2\pi\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\int_{IQ}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du\right.$$
$$\left.+\int_{PI}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du\right]$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}}e^{i\left(z+\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left(1-e^{-\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)i}\right)\int_{0}^{\infty e^{i\theta}}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}}\ e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}i\left(e^{\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)i}-e^{-\pi\left(\nu-\frac{1}{2}\right)i}\right)$$
$$\times\int_{0}^{\infty e^{i\theta}}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}}2\sin\pi\left(\frac{1}{2}-\nu\right)e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\times\int_{0}^{\infty e^{i\theta}}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du.$$

再利用正弦函数与 Γ 函数之間的关系，于是就得 (27.1) 式。

⑨　比方，

$$zb_{\nu}J'_{-\nu}(z)-\nu b_{\nu}J_{-\nu}(z)=b_{\nu}[zJ'_{-\nu}(z)-\nu J_{-\nu}(z)]$$
$$=b_{\nu}[zJ'_{-\nu}(z)+(-\nu)J_{-\nu}(z)]=b_{\nu}zJ_{-\nu-1}(z).$$

⑩　此处利用了公式(2.3)。

⑪　因为此时 $\theta+\alpha$ 位于第二、三象限。

⑫　本段可参看爱尔台里主編《高級超越函数》中譯本第二册 7-3-5 段。

⑬　以下可参看斯米尔諾夫著《高等数學教程》第三卷第二分册 78 段及第三

卷第三分册152段。

⑭ (30.9)式也可直接由(30.8)变换积分限而得。

⑮ 利用 $H_\nu^1(z)$ 的积分表示(27.1)式。

第 7 章

① 参閱 B. B. 戈卷别夫著《微分方程解析理論讲义》的第三章。

② 这是由于(33.6)为綫性方程之故。

③ 由
$$-w_{11}\frac{d^2w_1}{dz^2}-(\lambda-2h^2\cos 2z)w_{11}w_1=0,$$
$$w_1\frac{d^2w_{11}}{dz^2}+(\lambda-2h^2\cos 2z)w_{11}w_1=0,$$
相加得
$$w_1\frac{d^2w_{11}}{dz^2}-w_{11}\frac{d^2w_1}{dz^2}=0,$$
即
$$\frac{d}{dz}\left[w_1\frac{dw_{11}}{dz}-w_{11}\frac{dw_1}{dz}\right]=0.$$
积分之得
$$w_1\frac{dw_{11}}{dz}-w_{11}\frac{dw_1}{dz}=C,$$
这里 C 为一任意常数。以 $z=0$ 代入并由(34.1)得
$$w_1\frac{dw_{11}}{dz}-w_{11}\frac{dw_1}{dz}=1.$$

④ 因(33.6)为二阶綫性方程，只能有二个綫性独立解，它的任一解可表成这二个解的綫性組合。

⑤ 由
$$(w_1(\pi)-\sigma)A+w_{11}(\pi)B=0,$$
$$w_1'(\pi)A+(w_{11}'(\pi)-\sigma)B=0$$
可得
$$\begin{vmatrix} w_1(\pi)-\sigma & w_{11}(\pi) \\ w_1'(\pi) & w_{11}'(\pi)-\sigma \end{vmatrix}=0$$
(这是因为 A, B 不能同时为0，故其系数行列式必須为0)。故有
$$w_{11}'(\pi)w_1(\pi)-\sigma(w_1(\pi)+w_{11}'(\pi))+\sigma^2-w_1'(\pi)w_{11}(\pi)=0.$$
由于
$$w_{11}'(\pi)=w_1(\pi),$$
$$w_1(\pi)w_{11}'(\pi)-w_1'(\pi)w_{11}(\pi)=1,$$
故得
$$\sigma^2-2w_1(\pi)\sigma+1=0.$$

⑥ 由(35.2)得
$$w_1=\frac{1+\sigma^2}{2\sigma}=\frac{1+e^{2\pi i\nu}}{2e^{\pi i\nu}}=\frac{e^{\pi i\nu}+e^{-\pi i\nu}}{2}=\cos\pi\nu.$$

⑦ 这里用到了 (33.6) 的解在 $h=0$ 的連續性。

⑧ 由 (34.3)

$$w_1(z\pm\pi)=w_1(\pi)w_1(z)\pm w_1'(\pi)w_{11}(\pi)$$

得到当 $w_1'(\pi)=0$, $w_1(\pi)=\pm1$ 时有

$$w_1(z\pm\pi)=\pm w_1(z).$$

⑨ 因函数 $f(z)$ 是有界的，而 (36.2) 式的右边第一式当 $z\to\infty$ 时无界，故 $w_{11}(z)$ 不能有界。

⑩ 一个有限維向量空間 R^n 中的元素記作 $(a, b, c, \cdots)$。另外有一群 G，其元素記作$(\sigma, \tau, \mu, \cdots)$，把 σ, τ 看作 R^n 中的算子，$a\to\sigma(a)$ 叫作 σ 的表示 (即表現)，整个 G 的元素构成群 G 的表示。当 R^n 为既約时，則 G 就称为是既約的。

⑪ 由群 G 中所有的元素 $(\sigma, \tau, \mu, \cdots)$ 所引起的不变子空間若有一公共的不变子空間，就称它为 G 的不变子空間。若 R^n 存在眞正的不变子空間(除去 O 及其本身)，則称为是既約的。由于一維空間沒有眞正的不变子空間，故一維表現必然是既約表現。

⑫ 由于当 $h=0$ 时有 $w(z)=e^{i\nu z}$ 的形式，而 ν 为正整数之故。

⑬ 設 $f(z)$ 为在 $|z|<1$ 内的解析函数，則

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\qquad |z|<r<1.$$

这里 $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\qquad (r<1).$$

令 $z=re^{i\theta}$ 得 $$f(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{in\theta},$$

这里 $$A_n=\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

⑭ 这里 δ_{nr} 由下式确定

$$\delta_{nr}=\begin{cases}0, & n\neq r,\\ 1, & n=r.\end{cases}$$

⑮ 在 (38.3) 中令 $s=1$，得

$$\frac{1}{c_0}+\frac{4-\lambda}{h^2}+c_1=0,$$

$$c_0=-\frac{\lambda}{2h^2},$$

解之得 $$\lambda=-\frac{2h^4}{4-\lambda+c_1h^2}.$$

再在 (38.3) 中令 $s=2$，得

$$\lambda=-\cfrac{2h^4}{4-\lambda-\cfrac{h^4}{16-\lambda+c_2h^2}}.$$

由此可看出 λ 可展成連分数式 (38.4)。

⑯ 由 (38.8)

$$\lambda=\sum_{s\geq 0}a_sh^{2s},\qquad a_0=n^2,$$

而 $w_0=\cos nz$，由 (38.13) 得

$$\pi a_1=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2z\cos^2 nz dz=0.$$

再由微分方程

$$\frac{d^2w_1}{dz^2}+n^2w_1=2\cos 2z\cos nz$$

得
$$w_1=\frac{\cos(n-2)z}{4(n-1)}-\frac{\cos(n+2)z}{4(n+1)}.$$

重复运用可得 (38.14) 及 (38.15)。

⑰
$$\begin{aligned}
L_zf(z)&=\int_a^b L_zK(z,z')w(z')dz'\\
&=\int_a^b w(z')L_{z'}K(z,z')dz'=\int_a^b w\left[\frac{\partial^2K}{\partial z'^2}-2h^2\cos 2z'K\right]dz'\\
&=\int_a^b wd\left(\frac{\partial K}{\partial z'}\right)-K\int_a^b 2h^2\cos 2z'wdz'\\
&=w\frac{\partial K}{\partial z'}-\int_a^b\frac{\partial K}{\partial z'}\frac{\partial w}{\partial z'}dz'-\int_a^b K(2h^2\cos 2z'w)dz'\\
&=w\frac{\partial K}{\partial z'}-K\frac{\partial w}{\partial z'}\Big|_a^b+\int_a^b K\frac{\partial^2w}{\partial z'^2}dz'-K(2h^2\cos 2z'w)dz'\\
&=w\frac{\partial K}{\partial z'}-K\frac{\partial w}{\partial z'}\Big|_a^b+\int_a^b KL_zw(z')dz'\\
&=-\lambda f(z).
\end{aligned}$$